جزوه ی ریاضی ۲

- استاد اصغر ارژنگ

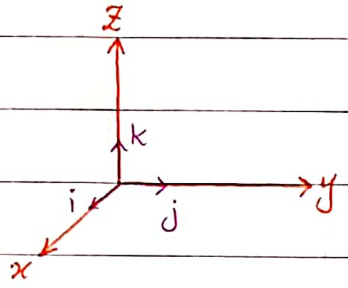
- حل بعضی از سوالات به عهده خود دانشجو بوده

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

توابع برداری

$A=(a,b,c)=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$



$$\begin{cases} i=(1,0,0) \\ j=(0,1,0) \\ k=(0,0,1) \end{cases}$$

اندازه‌ی A : $|\vec{A}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

بردار یکه‌ی $\vec{A}$: $\vec{u}_A=\dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

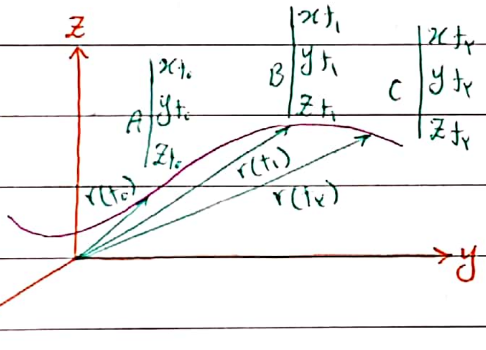
تابع برداری

$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))=x(t)\,\vec{i}+y(t)\,\vec{j}+z(t)\,\vec{k}$

t معرف زمان است

مثال $\Rightarrow \vec{r}(t)=(t^2,e^t,\sin t)=t^2\,\vec{i}+e^t\,\vec{j}+\sin t\,\vec{k}$

$r(t)$ معرف مسیر حرکت یک ذره در فضا است



حد و مشتق تابع برداری : کافیست از هر سه مولفه‌ی تابع برداری حد یا مشتق بگیریم

$\vec{r}(t)=e^t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+t^3\,\vec{k}$

$\lim\limits_{t\to 1}\vec{r}(t)=\lim\limits_{t\to 1}e^t\,\vec{i}+\lim\limits_{t\to 1}\sin t\,\vec{j}+\lim\limits_{t\to 1}t^3\,\vec{k}=e\,\vec{i}+\sin(1)\,\vec{j}+1\,\vec{k}$

$\vec{r}'(t)=e^t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+3t^2\,\vec{k}=(e^t,\cos t,3t^2)$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /   Subject:

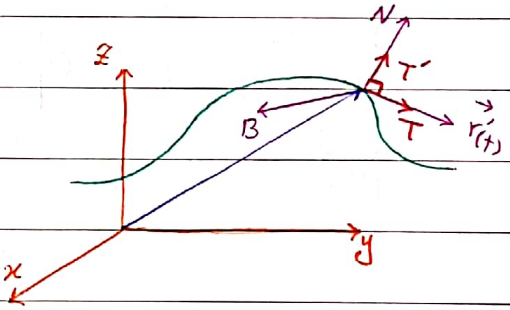
نکته ⇐ $\vec{r'}(t)$ بر مسیر حرکت یک ذره با معادله‌ی پارامتری $\vec{r}(t)$ مماس است.

○ یکه‌ی آن را بردار یکه‌ی مماس می‌نامند.

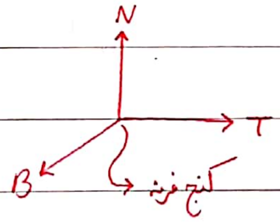
یکه‌ی مماس $\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{r'}(t)}{|\vec{r'}(t)|} \Rightarrow |\vec{T}(t)| = 1$

نکته ⇐ $\vec{T'}(t)$ بر $\vec{T}(t)$ عمود است (چرا؟) ○* یکه‌ی آن را بردار یکه‌ی عمودی نامند

یکه‌ی عمود $\vec{N}(t) = \dfrac{\vec{T'}(t)}{|\vec{T'}(t)|}$



قائم دوم $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$



$|\vec{T}| = |\vec{N}| = |\vec{B}| = 1$

○* $\vec{A}\cdot\vec{A} = |\vec{A}|^2$ $\vec{T}\cdot\vec{T} = |\vec{T}|^2 = 1^2 = 1$

مشتق $(\vec{T}\cdot\vec{T})' = 1' = 0 \Rightarrow \vec{T'}\cdot\vec{T} + \vec{T}\cdot\vec{T'} = 0$

$2\vec{T'}\cdot\vec{T} = 0 \Rightarrow T'\cdot T = 0 \Rightarrow$ T' بر T عمود است

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

طول قوس ⇐ طول قوس منحنی $\vec{r}_{(t)}$ در بازه‌ی $t_0 \le t \le t_1$ از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید

$$S = \int_{t=t_0}^{t=t_1} |\vec{r}'_{(t)}| \, dt = \int_{t=t_0}^{t=t_1} \sqrt{x'^2_{(t)} + y'^2_{(t)} + z'^2_{(t)}} \, dt$$

$$\text{قطر مکعب} = ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} dx = x'_{(t)} \, dt \\ dy = y'_{(t)} \, dt \\ dz = z'_{(t)} \, dt \end{array}\right\} \Rightarrow ds = \sqrt{x'^2_{(t)} + y'^2_{(t)} + z'^2_{(t)}} \, dt$$

$$\text{طول قوس} \quad \Sigma ds = \int_{t=t_0}^{t=t_1} ds = \int_{t=t_0}^{t=t_1} \sqrt{x'^2_{(t)} + y'^2_{(t)} + z'^2_{(t)}} \, dt$$

مثال: طول قوس منحنی پارامتری زیر را در بازه‌ی زمانی $0 \le t \le 1$ محاسبه کنید

$$\vec{r}_{(t)} = \sqrt{8}\, t \, \vec{i} + e^{2t} \vec{j} + e^{-2t} \vec{k}$$

$$\vec{r}'_{(t)} = \sqrt{8} \, \vec{i} + 2e^{2t} \vec{j} - 2e^{-2t} \vec{k}$$

$$|\vec{r}'_{(t)}| = \sqrt{(\sqrt{8})^2 + (2e^{2t})^2 + (-2e^{-2t})^2}$$

برای ساده‌کردن کسر روبه‌رو از اتحاد اول استفاده می‌کنیم

$$|\vec{r}'_{(t)}| = \sqrt{(2e^{2t} + 2e^{-2t})^2} \overset{t>0}{=} 2e^{2t} + 2e^{-2t}$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

$$S=\int_{t=0}^{t=1}|\vec{r}'(t)|\,dt=\int_0^1 (2e^{2t}+2e^{-2t})\,dt \qquad \bullet \int e^{At}=\frac{1}{A}e^{At}$$

$$=(e^{2t}-e^{-2t})\Big|_0^1=(e^{2}-e^{-2})-(1-1)=e^{2}-e^{-2}$$

مثال ○ بردارهای T و B و N منحنی پارامتری زیر را در لحظه‌ی دلخواه T محاسبه کنید.

$$\vec{r}(t)=(\sin t-t\cos t)\,\vec{i}+(\cos t+t\sin t)\,\vec{j}+\frac{t^2}{2}\,\vec{k}$$

$$\vec{r}(t)=\left(\sin t-t\cos t\,,\ \cos t+t\sin t\,,\ \frac{t^2}{2}\right)$$

$$\vec{r}'(t)=(t\sin t\,,\ t\cos t\,,\ t)$$

$$|\vec{r}'(t)|=\sqrt{(t\sin t)^2+(t\cos t)^2+t^2}=\sqrt{t^2(\sin^2 t+\cos^2 t+1)}=t\sqrt{2}$$

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}=\frac{(t\sin t,t\cos t,t)}{\sqrt{2}\,t}=\frac{(\sin t,\cos t,1)}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t,\cos t,1)$$

$$\vec{T}'(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t,-\sin t,0) \qquad \text{نکته}: |\alpha\vec{A}|=|\alpha||\vec{A}|$$

$$|\vec{T}'(t)|=\frac{1}{\sqrt{2}}|(\cos t,-\sin t,0)|=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\cos t)^2+(-\sin t)^2+0^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}=\frac{1/\sqrt{2}\,(\cos t,-\sin t,0)}{1/\sqrt{2}}=(\cos t,-\sin t,0)$$

$$\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t,\cos t,1)\times(\cos t,-\sin t,0)$$

iman NOTEBOOK
Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

نکته ⇒ $(\alpha.\vec{A})\times(b.\vec{B}) = \alpha b\,(\vec{A}\times\vec{B})$

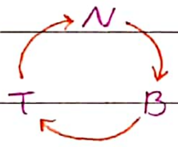
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} i & j & k \\ \sin t & \cos t & 1 \\ \cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\vec{i}\begin{vmatrix} \cos t & 1 \\ -\sin t & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \sin t & 1 \\ \cos t & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\vec{i}(\sin t) + \vec{j}(\cos t) + \vec{k}(-\sin^2 t - \cos^2 t)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(\sin t, \cos t, -1)$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}$$

نکات مهم: بردار $\vec{B}$ را می‌توان از فرمول روبه‌رو محاسبه کرد



$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$

$\vec{T} = \vec{N} \times \vec{B}$

$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$

مثال ⇐ بردارهای T, B, N منحنی زیر را در لحظه‌ی $t=0$ محاسبه کنید

$$\vec{r}(t) = (1+t)\,\vec{i} + (e^{2t})\,\vec{j} + (e^{-2t})\,\vec{k}$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / /

Subject:

$\vec{r}_{(t)} = (۱+t \,,\, e^{۲t} \,,\, e^{-۲t})$

$\vec{r}'_{(t)} = (۱ \,,\, ۲e^{۲t} \,,\, -۲e^{-۲t}) \Rightarrow \vec{r}'_{(0)} = (۱, ۲, -۲) \Rightarrow |\vec{r}'_{(0)}| = ۳$

$\vec{r}''_{(t)} = (0 \,,\, ۴e^{۲t} \,,\, ۴e^{-۲t}) \Rightarrow \vec{r}''_{(0)} = (0, ۴, ۴)$

$\vec{T}_{(0)} = \dfrac{\vec{r}'_{(0)}}{|\vec{r}'_{(0)}|} = \dfrac{۱}{۳}(۱, ۲, -۲)$

$\vec{B}_{(0)} = \dfrac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|} \overset{\text{حل در}}{\underset{\text{پایین}}{=\dots=}} \dfrac{۴(۴, -۱, ۱)}{۱۲\sqrt{۲}} = \dfrac{۱}{۳\sqrt{۲}}(۴, -۱, ۱)$

$r'_{(0)} \times r''_{(0)} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۲ & -۲ \\ 0 & ۴ & ۴ \end{vmatrix} = ۱۶\vec{i} - ۴\vec{j} + ۴\vec{k} = ۴(۴, -۱, ۱)$

$|r'_{(0)} \times r''_{(0)}| = ۴\sqrt{۴^۲ + (-۱)^۲ + ۱^۲} = ۴\sqrt{۸} = ۱۲\sqrt{۲}$

$\vec{N}_{(0)} = \vec{B}_{(0)} \times \vec{T}_{(0)}$

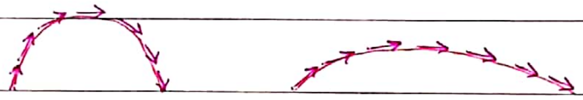
$= \dfrac{۱}{۳\sqrt{۲}}(۴, -۱, ۱) \times \dfrac{۱}{۳}(۱, ۲, -۲) = \dfrac{۱}{۹\sqrt{۲}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۴ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & -۲ \end{vmatrix}$

$= \dfrac{۱}{۹\sqrt{۲}}(۹\vec{j} + ۹\vec{k}) = \dfrac{۱}{\sqrt{۲}}(\vec{j} + \vec{k}) = \dfrac{۱}{۲}(0, ۱, ۱)$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

انحنا و تاب



نقطه‌ای را روی منحنی ثابت در نظر می‌گیریم در هر لحظه‌ی t طول قوس $S(t)$ را نسبت به آن نقطه محاسبه می‌کنیم آهنگ میزان تغییرات بردار یکه‌ی مماس نسبت به طول قوس را انحنا گویند

$$K = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| \qquad \tau = \pm \left| \frac{d\vec{B}}{ds} \right|$$

همواره می‌توان اثبات کرد ⇐

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = K\vec{N} \quad , \quad \frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau\vec{N}$$

○ به صورت نادقیق می‌توان گفت میزان انحراف منحنی از خط مماس را انحنا گویند و میزان انحراف منحنی از صفحه‌ی بوسان را تاب (پیچش) منحنی گویند.

فرمول های معادل برای محاسبه‌ی انحنا و تاب

$$K(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^{3}} \qquad \tau(t) = \frac{\vec{r}'''(t) \cdot (\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t))}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|^{2}}$$

معادله‌ی مکان $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

سرعت $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$

شتاب $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t)$

$$\Rightarrow K = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|^{3}}$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /

Subject:

مثال ۵) بردارهای T, B, N انحنا و تاب منحنی زیر را در لحظه‌ی دلخواه t بدست آورید.

$$\vec{r}(t) = (\sin t - t\cos t)\vec{i} + (\cos t + t\sin t)\vec{j} + \frac{t^2}{2}\vec{k}$$

$$\vec{r}(t) = (\sin t - t\cos t,\ \cos t + t\sin t,\ t^2/2)$$

$$\vec{r}'(t) = (t\sin t,\ t\cos t,\ t) \Rightarrow \vec{r}'(t) = t(\sin t, \cos t, 1)$$

$$\vec{r}''(t) = (\sin t + t\cos t,\ \cos t - t\sin t,\ 1)$$

$$\vec{r}'''(t) = (2\cos t - t\sin t,\ -2\sin t - t\cos t,\ 0)$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = t\begin{vmatrix} i & j & k \\ \sin t & \cos t & 1 \\ \sin t + t\cos t & \cos t - t\sin t & 1 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = t\left\{(t\sin t)\vec{i} + (t\cos t)\vec{j} - t\vec{k}\right\} = t^2(\sin t, \cos t, -1)$$

$$|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| = t^2\sqrt{(\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (-1)^2} = t^2\sqrt{2}$$

• بردارهای T, B, N را در سوال‌های قبل بدست آوردیم (صورت سوال عیناً مشابه یکی از سوالات قبل است)

$$\vec{B}(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{|r'(t) \times r''(t)|} = \frac{t^2(\sin t, \cos t, -1)}{t^2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t, \cos t, -1)$$

$$|\vec{r}'(t)| = t\sqrt{2} \qquad k(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3} = \frac{\sqrt{2}\,t^2}{(\sqrt{2}\,t)^3} = \frac{1}{2t}$$

$$\vec{r}'''(t) \cdot (\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) = (2\cos t - t\sin t,\ -2\sin t - t\cos t,\ 0) \cdot t^2(\sin t, \cos t, -1)$$

بعد از محاسبه

$$t^2(-t\underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{1}) = -t^3$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

$$\tau(t)=\frac{\vec{r}'''(t)\cdot(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t))}{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|^2}=\frac{-t^3}{(t^2\sqrt{2})^2}=\frac{-1}{2t}$$

مثال ۵) بردارهای T و B و N انحنا و تاب منحنی زیر را در لحظه‌ی $t=0$ بدست آورید

$$\vec{r}(t)=(1+t)\vec{i}+e^{2t}\vec{j}+e^{-2t}\vec{k}$$

بردارهای T,B,N عیناً در یکی از سوالات مشابه حل شده و بدست آمده اند

$$\vec{r}(t)=(1+t,\ e^{2t},\ e^{-2t})$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}'(t)&=(1,\ 2e^{2t},\ -2e^{-2t})\\ \vec{r}''(t)&=(0,\ 4e^{2t},\ 4e^{-2t})\\ \vec{r}'''(t)&=(0,\ 8e^{2t},\ -8e^{2t})\end{aligned}\right\}\xrightarrow{t=0}\left\{\begin{aligned}\vec{r}'(0)&=(1,2,-2)\\ \vec{r}''(0)&=(0,4,4)\\ \vec{r}'''(0)&=(0,8,-8)\end{aligned}\right.$$

$$|\vec{r}'(0)|=\sqrt{9}=3$$

$$\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 2 & -2\\ 0 & 4 & 4\end{vmatrix}=16\vec{i}-4\vec{j}+4\vec{k}=4(4,-1,1)$$

$$|\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)|=4\sqrt{18}=12\sqrt{2}$$

$$K(0)=\frac{|\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)|}{|\vec{r}'(0)|^3}=\frac{12\sqrt{2}}{3^3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\tau(0)=\frac{\vec{r}'''(0)\cdot(\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0))}{|\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)|^2}=\frac{(0,8,-8)\cdot4(4,-1,1)}{(12\sqrt{2})^2}=\frac{4(-16)}{12^2\times2}$$

$$=\frac{-4^3}{4^2\times3^2\times2}=\frac{-2}{9}$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

○ تمرین بسیار مهم ○ ○ حل در کتاب آقای فرامرزی ○

انحنا و تاب و بردارهای T و B و N منحنی زیر را در هر لحظه‌ی t محاسبه کنید

$$\vec{r}(t) = a\cos(\omega t)\,\vec{i} + a\sin(\omega t)\,\vec{j} + b\omega t\,\vec{k} \qquad a>0,\ b>0,\ \omega>0$$

○ جواب ○

$$\vec{r}(t) = (a\cos(\omega t),\ a\sin(\omega t),\ b\omega t)$$

$$\vec{r}'(t) = (-a\omega\sin(\omega t),\ a\omega\cos(\omega t),\ b\omega)$$

$$\vec{r}''(t) = (-a\omega^2\cos(\omega t),\ -a\omega^2\sin(\omega t),\ 0)$$

$$\vec{r}'''(t) = (a\omega^3\sin(\omega t) - 2a\omega\cos(\omega t),\ -(a\omega^3\cos(\omega t) + 2a\omega\sin(\omega t)),\ 0)$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(-a\omega\sin(\omega t))^2 + (a\omega\cos(\omega t))^2 + (b\omega)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2\omega^2\sin^2(\omega t) + a^2\omega^2\cos^2(\omega t) + b^2\omega^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\omega^2(a^2\sin^2(\omega t) + a^2\cos^2(\omega t) + b^2)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\omega^2(a^2\underbrace{(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t))}_{1} + b^2)} = \omega\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{a\omega\left(-\sin(\omega t),\ \cos(\omega t),\ \frac{b}{a}\right)}{\omega\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{T}(t) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-\sin(\omega t),\ \cos(\omega t),\ \frac{b}{a}\right)$$

Notebook iman

Scanned by CamScanner

$$\vec{r}'_{(t)} \times \vec{r}''_{(t)} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\omega \sin(\omega t) & a\omega \cos(\omega t) & b\omega \\ -a\omega^2 \cos(\omega t) & -a\omega^2 \sin(\omega t) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \Big((a\omega \cos(\omega t) \cdot 0) - (-a\omega^2 \sin(\omega t) \cdot b\omega) \Big) (\vec{i}) \; \dots$$

$$\dots \; - \Big((-a\omega \sin(\omega t) \cdot 0) - (-a\omega^2 \cos(\omega t) \cdot b\omega) \Big) (\vec{j}) \; \dots$$

$$\dots \; + \Big((-a\omega \sin(\omega t) \cdot -a\omega^2 \sin(\omega t)) - (-a\omega^2 \cos(\omega t) \cdot a\omega \cos(\omega t)) \Big) (\vec{k})$$

$$= ab\omega^3 \sin(\omega t) (\vec{i}) - ab\omega^3 \cos(\omega t) (\vec{j}) + \left(a^2\omega^3 \sin^2(\omega t) + a^2\omega^3 \cos^2(\omega t) \right) (\vec{k})$$

$$= ab\omega^3 \sin(\omega t) (\vec{i}) - ab\omega^3 \cos(\omega t) (\vec{j}) + \left(a^2\omega^3 (\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) \right) (\vec{k})$$

$$\vec{r}'_{(t)} \times \vec{r}''_{(t)} = \left(ab\omega^3 \sin(\omega t) \,,\, -ab\omega^3 \cos(\omega t) \,,\, a^2\omega^3 \right)$$

$$\vec{r}'_{(t)} \times \vec{r}''_{(t)} = ab\omega^3 \left(\sin(\omega t) \,,\, -\cos(\omega t) \,,\, \frac{a}{b} \right)$$

$$\left| \vec{r}'_{(t)} \times \vec{r}''_{(t)} \right| = ab\omega^3 \sqrt{ (\sin(\omega t))^2 + (-\cos(\omega t))^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 } = \dots$$

$$\dots \Rightarrow ab\omega^3 \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} = ab\omega^3 \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{b^2}} = a\omega^3 \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$B_{(t)} = \frac{\vec{r}'_{(t)} \times \vec{r}''_{(t)}}{\left| \vec{r}'_{(t)} \times \vec{r}''_{(t)} \right|} = \frac{ab\omega^3 \left(\sin(\omega t) \,,\, -\cos(\omega t) \,,\, \frac{a}{b} \right)}{a\omega^3 \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow B_{(t)} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\sin(\omega t) \,,\, -\cos(\omega t) \,,\, \frac{a}{b} \right)$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

$$k_{(t)} = \frac{|\vec{r}'_{(t)} \times \vec{r}''_{(t)}|}{|\vec{r}'_{(t)}|^3} = \frac{a\omega^3 \sqrt{a^2+b^2}}{(\omega\sqrt{a^2+b^2})^3} = \frac{a\omega^3 (a^2+b^2)^{1/2}}{\omega^3 (a^2+b^2)^{3/2}}$$

$$k_{(t)} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\tau_{(t)} = \frac{\vec{r}'''_{(t)} \cdot (\vec{r}'_{(t)} \times \vec{r}''_{(t)})}{|\vec{r}'_{(t)} \times \vec{r}''_{(t)}|^2}$$

$\Rightarrow \vec{r}'''_{(t)} \cdot (\vec{r}'_{(t)} \times \vec{r}''_{(t)})$

$(a\omega^3 \sin(\omega t) - 2a\omega \cos(\omega t) \;,\; -a\omega^3 \cos(\omega t) - 2a\omega \sin(\omega t) \;,\; 0)$

$\cdot\, (abw^3 \sin(\omega t) \;,\; -ab\omega^3 \cos(\omega t) \;,\; a^2\omega^2)$

حاصل $\Rightarrow \left(a^2 b\omega^4 \sin^2(\omega t) - 2a^2 b\omega^4 \sin(\omega t)\cos(\omega t)\right) + \cdots$

$\cdots + \left(a^2 b\omega^4 \cos^2(\omega t) + 2a^2 b\omega^4 \sin(\omega t)\cos(\omega t)\right) + (0) =$

$= a^2 b\omega^4 \sin^2(\omega t) + a^2 b\omega^4 \cos^2(\omega t) = a^2 b\omega^4 \left(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right)$

$= a^2 b\omega^4$

$$|\vec{r}'_{(t)} \times \vec{r}''_{(t)}|^2 = \left(a\omega^2 \sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2\omega^4 (a^2+b^2)$$

$$\tau_{(t)} = \frac{\vec{r}'''_{(t)} \cdot (\vec{r}'_{(t)} \times \vec{r}''_{(t)})}{|\vec{r}'_{(t)} \times \vec{r}''_{(t)}|^2} = \frac{a^2\, b\, \omega^4}{a^2\omega^4(a^2+b^2)} = \frac{b}{a^2+b^2}$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

مثال ۵ بردارهای T و B و N و انحنا و تاب منحنی زیر را در لحظه‌ی $t=1$ بدست آورید

$\vec{r}(t) = (t^۲/۲ \,,\, \ln t \,,\, \sqrt{۲}\, t)$

$\vec{r}'(t) = (t \,,\, ۱/t \,,\, \sqrt{۲}) \overset{t=۱}{\Longrightarrow} \vec{r}'(۱) = (۱ \,,\, ۱ \,,\, \sqrt{۲}) \overset{\text{اندازه}}{\Longrightarrow} ۲$

$\vec{r}''(t) = (۱ \,,\, -۱/t^۲ \,,\, ۰) \overset{t=۱}{\Longrightarrow} \vec{r}''(۱) = (۱ \,,\, -۱ \,,\, ۰)$

$\vec{r}'''(t) = (۰ \,,\, ۲/t^۳ \,,\, ۰) \overset{t=۱}{\Longrightarrow} \vec{r}'''(۱) = (۰ \,,\, ۲ \,,\, ۰)$

$$\vec{T}(۱) = \frac{\vec{r}'(۱)}{|\vec{r}'(۱)|} = \frac{۱}{۲}(۱ \,,\, ۱ \,,\, \sqrt{۲})$$

$$\vec{r}'(۱) \times \vec{r}''(۱) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۱ & \sqrt{۲} \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{vmatrix} = \sqrt{۲}\,(\vec{i}) + \sqrt{۲}\,(\vec{j}) - ۲\,(\vec{k}) = (\sqrt{۲} \,,\, \sqrt{۲} \,,\, -۲)$$

$$|r'(۱) \times r''(۱)| = \sqrt{۸}$$

$$B(۱) = \frac{\vec{r}'(۱) \times \vec{r}''(۱)}{|\vec{r}'(۱) \times \vec{r}''(۱)|} = \frac{(\sqrt{۲}, \sqrt{۲}, -۲)}{\sqrt{۸}} = \frac{\sqrt{۲}\,(۱, ۱, -\sqrt{۲})}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۲}(۱, ۱, -\sqrt{۲})$$

$$\vec{N}(۱) = \vec{B}(۱) \times \vec{T}(۱) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۱ & -\sqrt{۲} \\ ۱ & ۱ & \sqrt{۲} \end{vmatrix} = \frac{۱}{۴}(۲\sqrt{۲} \,,\, ۲\sqrt{۲} \,,\, ۰)$$

$$\vec{N}(۱) = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۲} \,,\, \sqrt{۲} \,,\, ۰)$$

$$K(۱) = \frac{|\vec{r}'(۱) \times \vec{r}''(۱)|}{|\vec{r}'(۱)|^۳} = \frac{\sqrt{۸}}{۲^۳} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲^۳} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

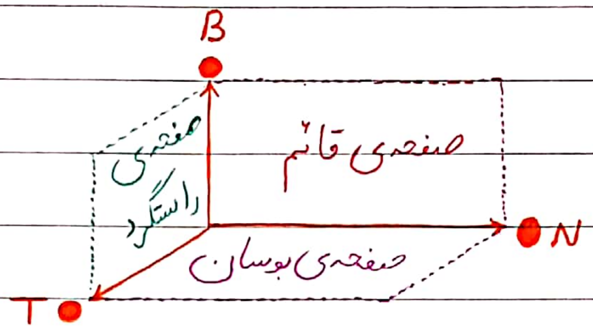
$$\tau(۱) = \frac{\vec{r}'''(۱) \cdot (\vec{r}'(۱) \times \vec{r}''(۱))}{|\vec{r}'(۱) \times \vec{r}''(۱)|^۲} = \frac{(۰, ۲, ۰) \cdot (\sqrt{۲}, \sqrt{۲}, ۰)}{۸} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۸} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

$K(t) = \tau(t) = \dfrac{\sqrt{2}\, t}{(1+t^2)^2}$ در حالت کلی می توان اثبات کرد



• صفحه ی شامل بردارهای T و N را صفحه ی بوسان گویند که بردار نرمال آن $\vec{B}$ است

• صفحه ی شامل بردارهای N و B را صفحه ی قائم گویند که بردار نرمال آن $\vec{T}$ است

• صفحه ی شامل بردارهای T و B را صفحه ی راستگرد گویند که بردار نرمال آن $\vec{N}$ است

مثال ○ صفحه ی بوسان و قائم منحنی زیر را در لحظه ی $t=1$ بدست آورید

بردارهای T و B در یکی از سوالات قبل که عیناً مانند این سوال است بدست آورده شد، به سوالات قبل رجوع شود

$\vec{r}(t) = \left(t^2/2 \,,\, \ln t \,,\, \sqrt{2}\, t\right)$

نقطه ی روی منحنی $A = \vec{r}(1) = \left(\overset{x_0}{1/2} \,,\, \overset{y_0}{0} \,,\, \overset{z_0}{\sqrt{2}}\right)$ ، $\ln 1 = 0$

بردار نرمال صفحه ی بوسان $\vec{B}(1) = \frac{1}{2}(1, 1, -\sqrt{2}) = \left(\overset{a}{1/2} \,,\, \overset{b}{1/2} \,,\, \overset{c}{-\sqrt{2}/2}\right)$

بردار نرمال صفحه ی قائم $\vec{T}(1) = \frac{1}{2}(1, 1, \sqrt{2}) = \left(\overset{a}{1/2} \,,\, \overset{b}{1/2} \,,\, \overset{c}{\sqrt{2}/2}\right)$

⊘ معادله ی صفحه: $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$ ⊘

صفحه بوسان $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(y-0) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(z-\sqrt{2}\right) = 0$

صفحه ی قائم $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(y-0) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(z-\sqrt{2}\right) = 0$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /　　　　　　　　　　　　　　　　　　Subject:

انحنا در حالات خاص

اوله:

انحنای منحنی پارامتری $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ به صورت زیر است

$$K(t) = \frac{|x'(t)\, y''(t) - x''(t)\, y'(t)|}{|(x'(t))^2 + (y'(t))^2|} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \quad , \quad z(t) = 0$$

$$r(t) = (x(t), y(t), 0)$$

دوم

انحنای منحنی $y = f(x)$ توسط رابطه‌ی زیر بدست می‌آید

$$K(x) = \frac{|y''|}{(1+y)^{3/2}} \qquad C: \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \\ z = 0 \end{cases} \qquad \vec{r}(t) = t\,\vec{i} + f(t)\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

نکته: $\rho(t) = \frac{1}{K(t)}$: شعاع انحنا

نکته: $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$: معادله‌ی مکان

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

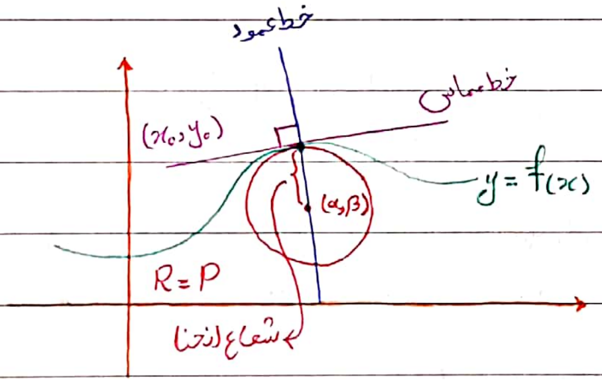
○ انحنای منحنی $C: \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = t + \cos t \end{cases}$ را در لحظه‌ی $t = \pi$ بدست آورید

$$\begin{cases} x' = 1 - \cos t \\ y' = 1 - \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(\pi) = 2 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = \sin t \\ y'' = -\cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''(\pi) = 0 \\ y''(\pi) = 1 \end{cases}$$

$$K(\pi) = \frac{|x'(\pi)y''(\pi) - x''(\pi)y'(\pi)|}{\left((x'(\pi))^2 + (y'(\pi))^2\right)^{3/2}} = \frac{|(2\times 1) - (0\times 1)|}{(2^2 + 1^2)^{3/2}} = \frac{2}{5^{3/2}} = \frac{2}{5\sqrt{5}}$$

دایره‌ی انحنا (دایره‌ی بوسان)



○ نقطه‌ی با مختصات (x_0, y_0) را روی منحنی $y = f(x)$ درنظر بگیریم دایره‌ی بوسان دایره‌ای است که در این نقطه بر منحنی مماس است و شعاع آن برابر با شعاع انحنا است و مرکز آن روی خط عمود بر منحنی در این نقطه قرار دارد

روش تعیین مختصات مرکز دایره‌ی انحنا (بوسان)

اگر معادله‌ی منحنی را به صورت $y_1 = f(x)$ و معادله‌ی دایره را به صورت $y_2 = g(x)$ درنظر بگیریم آنگاه در نقطه‌ی (x_0, y_0) داریم.

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) = y_2'(x_0) \\ y_1''(x_0) = y_2''(x_0) \end{cases}$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

نکته ⇐ دایره‌ی انحناء در جهت خمیدگی منحنی واقع است

نکته ⇐ اگر معادله‌ی منحنی به صورت پارامتری باشد آنگاه در روابط صفحه‌ی قبل (پایین صفحه) مشتق نسبت به t را خواهیم داشت

مثال: معادله‌ی دایره‌ی انحنای منحنی $C:\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = t + \cos t \end{cases}$ را در لحظه‌ی $t=\pi$ بدست آورید

$$\begin{cases} x_1' = 1 - \cos t \\ y_1' = 1 - \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1'(\pi) = ۲ \\ y_1'(\pi) = ۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' = \sin t \\ y_1'' = -\cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1''(\pi) = ۰ \\ y_1''(\pi) = ۱ \end{cases}$$

$$k(\pi) = \frac{|x_1'y_1'' - x_1''y_1'|}{\left((x_1')^۲ + (y_1')^۲\right)^{۳/۲}} = \frac{|(۲\times۱) - (۰\times۱)|}{(۲^۲ + ۱^۲)^{۳/۲}} = \frac{۲}{۵\sqrt{۵}}$$

شعاع دایره‌ی انحناء $R = \rho(\pi) = \frac{۱}{k(\pi)} = \frac{۵\sqrt{۵}}{۲}$

معادله‌ی دایره انحنا را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم ⇐ $(x_1(t) - \alpha)^۲ + (y_1(t) - \beta)^۲ = R^۲$

- از طرفین رابطه دوبار نسبت به t مشتق گرفته و $t = \pi$ قرار می‌دهیم:

$$۲x_1'(t)(x_1(t) - \alpha) + ۲y_1'(t)(y_1(t) - \beta) = ۰$$

مشتق اول $x_1'(t)(x_1(t) - \alpha) + y_1'(t)(y_1(t) - \beta) = ۰$ ⇐ تقسیم بر دو

مشتق دوم $x_1''(t)(x_1(t) - \alpha) + (x_1'(t))^۲ + y_1''(t)(y_1(t) - \beta) + (y_1'(t))^۲ = ۰$

$$\xrightarrow{t=\pi} \begin{cases} ۲(\pi - ۰ - \alpha) + ۱(\pi - ۱ - \beta) = ۰ \\ ۰ + ۲^۲ + ۱(\pi - ۱ - \beta) + ۱^۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \pi + ۴ \\ \alpha = \pi - ۵/۴ \end{cases}$$

دایره‌ی انحناء ⇐ $\left(x - (\pi - ۵/۴)\right)^۲ + \left(y - (\pi + ۴)\right)^۲ = \left(\frac{۵\sqrt{۵}}{۲}\right)$

نکته ⇐ از حل این دستگاه اغلب دو α و β بدست می‌آید α و β را باید انتخاب کنیم که در جهت خمیدگی منحنی است ولی در امتحان روش مثال را دنبال می‌کنیم

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /

Subject: ....

o معادله‌ی دایره‌ی بوسان منحنی $y = \arctan x$ را در نقطه‌ای به طول $x=1$ بدست آورید.

$y = \arctan x$ $\quad y' = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad y'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$y(1) = \frac{\pi}{4}$ $\quad y'(1) = \frac{1}{2}$ $\quad y''(1) = \frac{-1}{2}$

$$K(1) = \frac{|y''(1)|}{(1+y'(1)^2)^{3/2}} = \frac{|-1/2|}{(1+(1/2)^2)^{3/2}} = \frac{1/2}{(5/4)^{3/2}} = \frac{4}{5\sqrt{5}}$$

$$R = \frac{1}{K(1)} \Rightarrow R = \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

o معادله‌ی دایره‌ی انحنا را مانند روبه‌رو در نظر می‌گیریم $\Leftarrow$ $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$

o از طرفین رابطه دوبار مشتق گرفته و $x = 1$ قرار می‌دهیم:

$$2(x-\alpha) + 2y'(y-\beta) = 0$$

مشتق اول $\Leftarrow$ تقسیم بر دو $\Rightarrow$ $(x-\alpha) + y'(y-\beta) = 0$

مشتق دوم $\Leftarrow$ $1 + y''(y-\beta) + (y')^2 = 0$

$$\xrightarrow{x=1} \begin{cases} (1-\alpha) + y'(1)(y(1)-\beta) = 0 \\ 1 + y''(1)(y(1)-\beta) + (y'(1))^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\alpha) + (1/2)(\pi/4 - \beta) = 0 \\ 1 + (-1/2)(\frac{\pi}{4} - \beta) + (1/2)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pi/4 - 5/2 \\ \beta = 1 + 5/4 = 9/4 \end{cases}$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

مولفه های مماس و قائم شتاب

معادله ی مکان $\vec{r}_{(t)} = x_{(t)}\vec{i} + y_{(t)}\vec{j} + z_{(t)}\vec{k}$

سرعت $v_{(t)} = \vec{r}'_{(t)}$

شتاب $a_{(t)} = \vec{r}''_{(t)}$

$$k = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|^{3}}$$

همواره می توان نوشت

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N}$$

مولفه ی مماس شتاب $a_T = \frac{d}{dt}|\vec{r'_{(t)}}| = (|\vec{v}_{(t)}|)'$

مولفه ی قائم شتاب $a_N = k|\vec{r'_{(t)}}|^{2} = k(x'^{2}_{(t)} + y'^{2}_{(t)} + z'^{2}_{(t)})$

اتحاد

$$|\vec{a}|^{2} = a_T^{2} + a_N^{2}$$

○ نکته مهم ○ روش محاسبه ی انحنا با استفاده از مولفه های مماس و قائم شتاب

① $|\vec{a}|$

② a_T

③ $a_N = \sqrt{|\vec{a}|^{2} - a_T^{2}}$

④ $k = \frac{a_N}{|\vec{r'}_{(t)}|^{2}}$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

مثال ۰ مولفه‌های مماس و قائم شتاب منحنی زیر را بدست آورید سپس با استفاده از آن‌ها انحنای منحنی را محاسبه کنید.

$\vec{r}(t) = \sin(t^2)\,\vec{i} + \cos(t^2)\,\vec{j} + \sqrt{3}\,t^2\,\vec{k}$

$\vec{r}(t) = (\sin(t^2),\ \cos(t^2),\ \sqrt{3}\,t^2)$

$\vec{r}'(t) = \vec{v}(t) = (2t\cos(t^2),\ -2t\sin(t^2),\ 2\sqrt{3}\,t)$

$\Rightarrow\ 2t(\cos(t^2),\ -\sin(t^2),\ \sqrt{3})$

$\vec{r}''(t) = \vec{a}(t) = (2\cos(t^2) - 4t^2\sin(t^2),\ -2\sin(t^2) - 4t^2\cos(t^2),\ 2\sqrt{3})$

$|\vec{r}'(t)| = |\vec{v}(t)| = 2t\sqrt{(\cos(t^2))^2 + (-\sin(t^2))^2 + (\sqrt{3})^2} = 2t\sqrt{4} = 4t$

$|\vec{r}''(t)| = |\vec{a}(t)| = \sqrt{(2\cos(t^2) - 4t^2\sin(t^2))^2 + (-2\sin(t^2) - 4t^2\cos(t^2))^2 + (2\sqrt{3})^2} = \ldots$

$\ldots = \sqrt{4 + 16t^4 + 0 + 12} = \sqrt{16 + 16t^4}$

$\Rightarrow a_T = \frac{d}{dt}|\vec{r}'(t)| = \frac{d}{dt}(4t) = 4$

$\Rightarrow a_N = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_T^2} = \sqrt{16 + 16t^4 - 16} = \sqrt{16t^4} = 4t^2$

$K = \frac{a_N}{|\vec{r}'(t)|^2} = \frac{4t^2}{(4t)^2} = \frac{1}{4}$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /　　　　Subject:

□ در مثال قبل بردارهای T و B و N و انحنا و تاب را نیز محاسبه کنید

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{2t(\cos t^2, -\sin t^2, \sqrt{3})}{4t} = \frac{1}{2}(\cos t^2, -\sin t^2, \sqrt{3})$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2t\cos t^2 & -2t\sin t^2 & 2\sqrt{3}t \\ 2\cos t^2 - 4t^2\sin t^2 & -2\sin t^2 - 4t^2\cos t^2 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = (-4\sqrt{3}t\sin t^2 + 4\sqrt{3}t\sin t^2 + 8\sqrt{3}\cos t^2)\vec{i} + \dots$$

$$\dots - (4\sqrt{3}\cos t^2 - 4\sqrt{3}t\cos t^2 + 8\sqrt{3}t^3\sin t^2)\vec{j} + \dots$$

$$\dots + (-4t\sin t^2\cos t^2 - 8t^3\cos^2 t^2 + 4t\sin t^2\cos t^2 - 8t^3\sin t^2)\vec{k} = \dots$$

$$\Rightarrow \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = (8\sqrt{3}t^3\cos t^2, -8\sqrt{3}t^3\sin t^2, -8t^3)$$

$$|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| = \sqrt{(8\sqrt{3}t^3\cos t^2)^2 + (-8\sqrt{3}t^3\sin t^2)^2 + (-8t^3)^2} = \dots$$

$$\dots = 8t^3\sqrt{(\cos^2 t^2 + \sin^2 t^2)3 + 1} = 8t^3\sqrt{4} = 16t^3$$

$$\vec{B}(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|} = \frac{8t^3(\sqrt{3}\cos t^2, -\sqrt{3}\sin t^2, -1)}{16t^3}$$

$$\vec{B}(t) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos t^2, -\sqrt{3}\sin t^2, -1)$$

ادامه در صفحه‌ی بعد...

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

$$\vec{N}_{(t)} = \vec{B}_{(t)} \times \vec{T}_{(t)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sqrt{3}\cos t^2 & -\sqrt{3}\sin t^2 & -1 \\ \cos t^2 & -\sin t^2 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \left(-3\sin t^2 - \sin t^2\right)\vec{i} + \dots$$

$$\dots - \left(3\cos t^2 + \cos t^2\right)\vec{j} + \dots$$

$$\dots + \left(-\sqrt{3}\sin t^2\cos t^2 + \sqrt{3}\sin t^2 \cos t^2\right)\vec{k} = \dots$$

$$\vec{N}_{(t)} = \frac{1}{4}\left(-4\sin t^2, -4\cos t^2, 0\right) = -\left(\sin t^2, \cos t^2, 0\right)$$

$$K_{(t)} = \frac{|\vec{r}'_{(t)} \times \vec{r}''_{(t)}|}{|\vec{r}'_{(t)}|^3} = \frac{16t^3}{(4t)^3} = \frac{1}{4}$$

$$\vec{r}'''_{(t)} = \left(-12t\sin t^2 - 8t^3\cos t^2,\ -12t\cos t^2 + 8t^3\sin t^2,\ 0\right)$$

$$\vec{r}'''_{(t)} \cdot \left(\vec{r}'_{(t)} \times \vec{r}''_{(t)}\right) = \left(-12t\sin t^2 - 8t^3\cos t^2,\ -12t\cos t^2 + 8t^3\sin t^2,\ 0\right) \cdot \left(8\sqrt{3}t^3\cos t^2,\ -8\sqrt{3}t^3\sin t^2,\ -8t^3\right)$$

$$= -96\sqrt{3}t^4\sin t^2\cos t^2 - 64\sqrt{3}t^6\cos^2 t^2 + 96\sqrt{3}t^4\sin t^2\cos t^2 - 64\sqrt{3}t^6\sin^2 t^2 + 0 = \dots$$

$$\dots = -64\sqrt{3}t^6\left(\sin^2 t^2 + \cos^2 t^2\right) = -64\sqrt{3}t^6$$

$$\tau = \frac{\vec{r}'''_{(t)} \cdot \left(\vec{r}'_{(t)} \times \vec{r}''_{(t)}\right)}{|\vec{r}'_{(t)} \times \vec{r}''_{(t)}|^2} = \frac{-64\sqrt{3}t^6}{(16t^3)^2} = \frac{-2^6\sqrt{3}t^6}{(2^4t^3)^2} = \frac{-2^6\sqrt{3}t^6}{2^8t^6} = \frac{-\sqrt{3}}{4}$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

مثال ۵ بردارهای T و B و N و مولفه‌های قائم و مماس شتاب منحنی زیر را بدست آورید

$$\vec{r}(t) = \left(e^{t},\ -e^{-t},\ \sqrt{2}\,t\right)$$

$$\vec{r}'(t) = \left(e^{t},\ e^{-t},\ \sqrt{2}\right) \Rightarrow |\vec{r}'(t)| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2}$$

$$\vec{r}''(t) = \left(e^{t},\ -e^{-t},\ 0\right)$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{\left(e^{t},\ e^{-t},\ \sqrt{2}\right)}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2}}$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ e^{t} & e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^{t} & -e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = e^{-t}\sqrt{2}\,(\vec{i}) + e^{t}\sqrt{2}\,(\vec{j}) - 2\,(\vec{k})$$

$$|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| = \sqrt{2e^{-2t} + 2e^{2t} + 4} = \sqrt{2}\sqrt{e^{-2t} + e^{2t} + 2}$$

$$\vec{B}(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|} = \frac{\sqrt{2}\left(e^{-t},\ e^{t},\ -\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}\sqrt{e^{-2t} + e^{2t} + 2}} = \frac{\left(e^{-t}, e^{t}, -\sqrt{2}\right)}{\sqrt{e^{-2t} + e^{2t} + 2}}$$

$$\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2}}\right)^{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ e^{-t} & e^{t} & -\sqrt{2} \\ e^{t} & e^{-t} & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \left(\frac{1}{e^{2t} + e^{-2t} + 2}\right)\left(\left(e^{t}\sqrt{2} + e^{-2}\sqrt{2}\right)\vec{i} - \left(e^{-t}\sqrt{2} + e^{t}\sqrt{2}\right)\vec{j} + \left(e^{-2t} - e^{2t}\right)\vec{k}\right)$$

$$\vec{N}(t) = \frac{1}{e^{2t} + e^{-2t} + 2}\left(e^{t}\sqrt{2} + e^{-2}\sqrt{2},\ -e^{-t}\sqrt{2} - e^{t}\sqrt{2},\ e^{-2t} - e^{2t}\right)$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

$$k = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^{۳}} = \frac{\sqrt{۲}\sqrt{e^{-۲t} + e^{۲t} + ۲}}{\left(\sqrt{e^{۲t} + e^{-۲t} + ۲}\right)^{۳}} = \frac{\sqrt{۲}}{(\underbrace{e^{۲t} + e^{-۲t} + ۲}_{\text{اتحاد}})} = \frac{\sqrt{۲}}{(e^{t} + e^{-t})^{۲}}$$

$$\vec{r}'''(t) = (e^{t}, e^{-t}, ۰)$$

$$\vec{r}'''(t) \cdot (\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) = (e^{t}, e^{-t}, ۰) \cdot (e^{-t}\sqrt{۲}, e^{t}\sqrt{۲}, -۲)$$

$$\vec{r}'''(t) \cdot (\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) = \sqrt{۲} + \sqrt{۲} + ۰ = ۲\sqrt{۲}$$

$$|r'(t) \times r''(t)|^{۲} = \left(\sqrt{۲}\sqrt{e^{-۲t} + e^{۲t} + ۲}\right)^{۲} = ۲(\underbrace{e^{-۲t} + e^{۲t} + ۲}_{\text{اتحاد}})$$

$$|r'(t) \times r''(t)|^{۲} = ۲(e^{t} + e^{-t})^{۲}$$

$$\tau = \frac{\vec{r}'''(t) \cdot (\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t))}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|^{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲(e^{t} + e^{-t})^{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{(e^{t} + e^{-t})^{۲}}$$

$$\Rightarrow \text{«} \ \tau = k \ \text{»} \Leftarrow$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

حد و مشتق توابع دو متغیره

$\mathbb{R}$ مجموع اعداد حقیقی

$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

تابع دو متغیره $f : D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow D_2 \subseteq \mathbb{R}$

$(x,y) \longrightarrow z = f(x,y)$

○ تابع دو متغیره، یک زوج مرتب را به یک عدد حقیقی تصویر می‌کند

نکته ⇐ به ازاء هر زوج مرتب به عنوان ورودی، دو تا عدد حقیقی متفاوت به عنوان خروجی، نداشته باشیم

$z = f(x,y) = x^2 + y^2 + xy \Rightarrow f(1,2) = 1^2 + 2^3 + (1\times 2) = 11$

$(1,2) \xrightarrow{f} 11$

تابع مساحت مستطیل $S(x,y) = xy$ x طول y عرض

تابع محیط مستطیل $L(x,y) = 2(x+y)$

○ برای محاسبه‌ی حد تابع $f(x,y)$ در نقطه‌ی (x_0,y_0) کافیست این نقطه را در تابع f جایگذاری کنیم اگر از لحاظ محاسباتی مشکلی پیش نیاید و حالت های مبهم نیز پیش نیاید آنگاه عدد بدست آمده حاصل حد خواهد بود درصورت پیش آمدن حالت های مبهم در اغلب اوقات حد موجود نیست که این مسئله را با انتخاب مسیر نشان می‌دهیم.

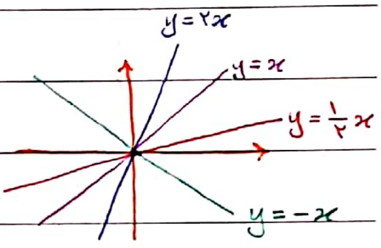
iman

Date: / / Subject:

- حد تابع f در نقطه‌ی (x_0,y_0) در صورت وجود، بایستی بر روی تمام مسیرهایی که از این نقطه می‌گذرند مقداری یکسان باشد. بعلاوه برای بررسی عدم وجود حد کافیست دو مسیر متفاوت انتخاب کنیم که حاصل حد روی آن دو مسیر یکسان نباشد.

مثال: بررسی کنید حدود زیر موجود نیستند

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3y^2}{3x^2+4y^2} = \frac{0}{0}$$ مبهم



مسیر $y=x$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3y^2}{3x^2+4y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2+3x^2}{3x^2+4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{7x^2} = \frac{5}{7}$$

مسیر $y=2x$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3y^2}{3x^2+4y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2+3(2x)^2}{3x^2+4(2x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{14x^2}{19x^2} = \frac{14}{19}$$

- به ازاء دو زوج مرتب به عنوان ورودی، دو خروجی متفاوت داشتیم. پس حد موجود نیست

نکته‌ی مهم: به جای انتخاب مسیرهای $y=x$ ، $y=2x$ ، $y=3x$ و ... از همان ابتدا مسیر را به صورت $y=mx$ می‌گیریم. اگر حاصل حد تابعی از m بدست آید، آنگاه حد موجود نمی‌باشد

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3y^2}{3x^2+4y^2}$$

مسیر $y=mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3y^2}{3x^2+4y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2+3(mx)^2}{3x^2+4(mx)^2} = \frac{2+3m^2}{3+4m^2}$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 y^2}{(x^3+y^3)^2}$$

مسیر $y=mx$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^2}{(x^3+y^3)^2} = \lim_{x\to0} \frac{x^4(mx)^2}{(x^3+(mx)^3)^2} = \lim_{x\to0} \frac{m^2x^6}{x^6(1+m^3)^2} = \frac{m^2}{(1+m^3)^2}$$

نکته‌ی مهم: اگر روی مسیر $y=mx$ حاصل حد در مبدأ، عددی ثابت بدست آمد نمی‌توان نتیجه گرفت که حد موجود است؛ باید مسیرهای دیگری را نیز امتحان کرد. مانند:

$y=mx^2$ ، $y=mx^3$ ، ... یا $x=my^2$ ، $x=my^3$ ، ...

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(y^2)}{2y^2+3x^4+x^2y}$$

مسیر $y=mx$:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin((mx)^2)}{2(mx)^2+3x^4+x^2(mx)} \overset{\text{هم‌ارزی}}{=} \lim_{x\to0} \frac{m^2x^2}{2m^2x^2+3x^4+mx^3} = \dots$$

$$\dots = \lim_{x\to0} \frac{x^2(m^2)}{x^2(2m^2+3x^2+mx)} = \frac{m^2}{2m^2} = \frac{1}{2}$$

مسیر $y=mx^2$:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin((mx^2)^2)}{2(mx^2)^2+3x^4+x^2(mx^2)} \overset{\text{هم‌ارزی}}{=} \lim_{x\to0} \frac{m^2x^4}{2m^2x^4+3x^4+mx^4} = \dots$$

$$\dots = \lim_{x\to0} \frac{x^4(m^2)}{x^4(2m^2+3+m)} = \frac{m^2}{2m^2+3+m}$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^4 + x^3}{3y^6 + x^2y^2}$$

مسیر $x = my^2$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^4 + x^3}{3y^6 + x^2y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{2(my^2)y^4 + (my^2)^3}{3y^6 + (my^2)^2 y^2} = \dots$$

$$\dots = \lim_{y\to 0} \frac{2my^6 + m^3y^6}{3y^6 + m^2y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{y^6(2m + m^3)}{y^6(3 + m^2)} = \frac{2m + m^3}{3 + m^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{12} + x^6y^2}{(x^6 + 2y^2)^2}$$

مسیر $y = mx^3$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{12} + x^6y^2}{(x^6 + 2y^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{12} + x^6(mx^3)^2}{(x^6 + 2(mx^3)^2)^2} = \dots$$

$$\dots = \lim_{x\to 0} \frac{x^{12} + m^2x^{12}}{(x^6 + 2m^2x^6)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{12}(1 + m^2)}{x^{12}(1 + 2m^2)^2} = \frac{1 + m^2}{(1 + 2m^2)^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^5 + y^6 + x^{10}y^{10}}{(x^3 + y)^6}$$

مسیر $y = mx^3$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^5 + y^6 + x^{10}y^{10}}{(x^3 + y)^6} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3(mx^3)^5 + (mx^3)^6 + x^{10}(mx^3)^{10}}{(x^3 + (mx^3))^6} = \dots$$

$$\dots = \lim_{x\to 0} \frac{m^5x^{18} + m^6x^{18} + m^{10}x^{40}}{(x^3(1+m))^6} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{18}(m^5 + m^6 + m^{10}x^{22})}{x^{18}(1+m)^6} = \dots$$

$$\dots = \frac{m^5 + m^6}{(1+m)^6}$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^{18} + x^{6}}{(x^{3}+xy^{6})^{2}}$$

مسیر $x = my^{3}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^{18} + x^{6}}{(x^{3} + xy^{6})^{2}} = \lim_{y\to 0} \frac{y^{18} + (my^{3})^{6}}{\left((my^{3})^{3} + (my^{3})(y^{6})\right)^{2}} = \dots$$

$$\dots = \lim_{y\to 0} \frac{y^{18} + m^{6}y^{18}}{(m^{3}y^{9} + my^{9})^{2}} = \lim_{y\to 0} \frac{y^{18}(1 + m^{6})}{y^{18}(m^{3}+m)^{2}} = \dots$$

$$\dots = \frac{1 + m^{6}}{m^{3} + m}$$

حدود مکرر

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

$$L_1 = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$$

$$L_2 = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)$$

نکته: اگر حد تابع f در نقطه‌ی (x_0, y_0) موجود باشد آنگاه حدود مکرر موجود و باهم برابرند.

نکته: اگر حدود مکرر موجود نباشند یا باهم برابر نباشند آنگاه حد تابع f موجود نیست.

نکته: اگر حدود مکرر موجود و باهم برابر باشند آنگاه نمی‌توان نتیجه گرفت که حد تابع f موجود است یا نه.

مثال: بررسی کنید حد روبه‌رو موجود نیست.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^{2} + 3y^{2}}{3x^{2} + 4y^{2}}$$

$$L_1 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{2x^{2}+3y^{2}}{3x^{2}+4y^{2}}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{3y^{2}}{4y^{2}}\right) = \frac{3}{4}$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{2x^{2}+3y^{2}}{3x^{2}+4y^{2}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^{2}}{3x^{2}}\right) = \frac{2}{3}$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / /　　　　Subject:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2+3y^2}{15x^2+9y^2}$$

$$L_1 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{5x^2+3y^2}{15x^2+9y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{3y^2}{9y^2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{5x^2+3y^2}{15x^2+9y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{5x^2}{15x^2}\right) = \frac{1}{3}$$

○ طبق نکته‌ی صفحه‌ی قبل، حدود مکرر موجود و باهم برابر هستند پس نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که حد تابع موجود است بنابراین:

مسیر $y = mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2+3y^2}{15x^2+9y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^2+3(mx)^2}{15x^2+9(mx)^2} = \dots$$

$$\dots = \lim_{x\to 0} \frac{5x^2+3m^2x^2}{15x^2+9m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(5+3m^2)}{x^2(15+9m^2)} = \frac{5+3m^2}{15+9m^2}$$

بنابراین تابع حد ندارد.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}$$

$$\begin{cases} (x,y) \to 0 \\ x^2+y^2 \to 0 \end{cases}$$

$r = x^2+y^2 \Rightarrow r \to 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r)}{(r)} = 1$$

○ نکته مهم ○ اگر محاسبه‌ی حد در نقطه‌ی $(0,0)$ باشد و در صورت، تابع $Ax^{2n}+By^{2n}$ داشته باشیم آنگاه می‌توان برای بررسی حد از تغییر متغیر قطبی استفاده کرد

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$x^2+y^2 = r^2$

$(x,y) \to 0 \Rightarrow r \to 0$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

مثال ۰ حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y^3}{x^4 + 2y^4} = \dots$$

$$\dots = \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)^3 (r\sin\theta)^3}{(r\cos\theta)^4 + 2(r\sin\theta)^4} = \lim_{r\to 0} \frac{r^6 (\cos^3\theta \sin^3\theta)}{r^4 (\cos^4\theta + 2\sin^4\theta)} = 0$$

کراندار

مشتقات جزئی

فرض کنید f تابعی از (x,y) باشد:

- f_x یعنی مشتق جزئی f نسبت به x. یعنی از f نسبت به x مشتق می‌گیریم با فرض این که y ثابت باشد (ثابت عددی)
- f_y یعنی مشتق جزئی f نسبت به y. یعنی از f نسبت به y مشتق می‌گیریم با فرض اینکه x ثابت باشد (ثابت عددی)

مثال ۰

$$f(x,y) = x^3 y^4 + e^{(x^2+y^5)}$$

$$f_x = x^3 y^4 + e^{(x^2+y^5)} \Rightarrow f_x = 3x^2 y^4 + 2x e^{(x^2+y^5)}$$

$$f_y = x^3 y^4 + e^{(x^2+y^5)} \Rightarrow f_y = 4y^3 x^3 + 5y^4 e^{(x^2+y^5)}$$

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^3) + \sin(x^3 y^4)$$

$$f_x = \ln(x^2+y^3) + \sin(x^3y^4) \Rightarrow f_x = \frac{2x}{x^2+y^3} + (3x^2)(y^4)\cos(x^3y^4)$$

$$f_y = \ln(x^2+y^3) + \sin(x^3y^4) \Rightarrow f_y = \frac{3y^2}{x^2+y^3} + (4y^3)(x^3)\cos(x^3y^4)$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

نماد مشتق جزئی

تک متغیره f , $f' = \frac{df}{dx}$, $f'' = \frac{d^2f}{dx^2}$

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial f}{\partial x}$$

مشتق جزئی دوبار نسبت به x = $f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \xrightarrow{\text{طبق قرارداد}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

① اول نسبت به x و بعد نسبت به y مشتق بگیریم: $f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \xrightarrow{\text{طبق قرارداد}} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

② اول نسبت به y و بعد نسبت به x مشتق بگیریم: $f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \xrightarrow{\text{طبق قرارداد}} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

①, ② $\Rightarrow f_{xy} = f_{yx}$

$f = x^3y^4 + e^{x^2+y^5}$

$f_x = 3x^2y^4 + 2x e^{x^2+y^5}$

$f_y = 4x^3y^3 + 5y^4 e^{x^2+y^5}$

$f_{xx} = (f_x)_x = 6xy^4 + 2e^{x^2+y^5} + 2x(2x e^{x^2+y^5})$

$f_{yy} = (f_y)_y = 12x^3y^2 + 20y^3 e^{x^2+y^5} + 5y^4(5y^4 e^{x^2+y^5})$

$f_{xy} = (f_x)_y = 12x^2y^3 + 2x(5y^4 e^{x^2+y^5})$

$f_{yx} = (f_y)_x = 12x^2y^3 + 5y^4(2x e^{x^2+y^5})$

$\Longrightarrow f_{xy} = f_{yx}$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

تعریف مشتق جزئی

f تک متغیره :

مقدار مشتق f در x_0 = $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

تابع مشتق $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

f دو متغیره :

مشتق جزئی f نسبت به x در نقطه‌ی (x_0, y_0)

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

مشتق جزئی f نسبت به x

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

مشتق جزئی f نسبت به y در نقطه‌ی (x_0, y_0)

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

مشتق جزئی f نسبت به y

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

مثال ○ فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^4}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ محاسبه کنید $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ چقدر می‌شود.

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

مثال ○ فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 1 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ محاسبه کنید $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ چقدر می‌شود.

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h^2)-1}{h}=\infty$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim\frac{\sin(h^2)-1}{h}=\infty$$

○ عموماً اینگونه سوال نمی‌دهند ○

قانون زنجیره‌ای مشتق

فرض کنید f تابعی از u باشد و u تابعی از x آنگاه:

$f\sim u\sim x$

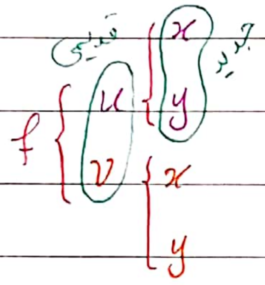
$f\sim x$

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

iman NOTEBOOK

Date: / / Subject:

فرض کنید f تابعی از v و u باشد و u و v توابعی از x و y باشند آنگاه:

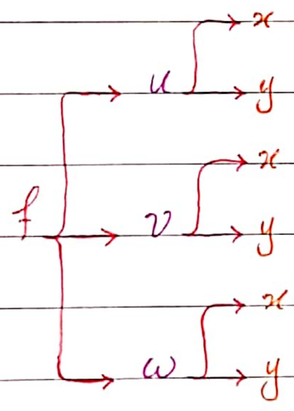


$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

به صورت اندیسی می‌توان نوشت تا راحت‌تر شود

$$\begin{cases} f_x = f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x \\ f_y = f_u \cdot u_y + f_v \cdot v_y \end{cases}$$

نکته ← برای محاسبه‌ی مشتق نسبت به هرکدام از متغیرهای جدید از همه‌ی متغیرهای قدیمی استفاده می‌کنیم.



$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial w}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x = f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x + f_w \cdot w_x \\ f_y = f_u \cdot u_y + f_v \cdot v_y + f_w \cdot w_y \end{cases}$$

Date: / / Subject:

مثال ۵ فرض کنید $f=uvw$ و $u=x^2-y^2$, $v=x^2+y^2$, $w=x^4+y^4$ آنگاه f_x و f_y را محاسبه کنید.

$f_x = f_u . u_x + f_v . v_x + f_w . w_x$

$f_x = vw(2x) + uw(2x) + uv(4x^3)$

نکته $\Rightarrow uv = x^4 - y^4$ نکته $\Rightarrow u+v = 2x^2$

$f_x = 2xw(v+u) + 4x^3(uv)$ از $(2xw)$ فاکتور گرفتیم

$f_x = 2x(x^4+y^4)(2x^2) + 4x^3(x^4-y^4)$

$f_x = (4x^3)(x^4+y^4) + (4x^3)(x^4-y^4)$ از $(4x^3)$ فاکتور گرفتیم

$f_x = (4x^3)(x^4+y^4+x^4-y^4)$

$f_x = 8x^7$

$f_y = f_u . u_y + f_v . v_y + f_w . w_y$

$f_y = vw(-2y) + uw(2y) + uv(4y^3)$

نکته $\Rightarrow uv = x^4 - y^4$ نکته $\Rightarrow u-v = -2y^2$

$f_y = 2yw(-v+u) + 4y^3(uv)$ از $(2yw)$ فاکتور گرفتیم

$f_y = 2y(x^4+y^4)(-2y^2) + 4y^3(x^4-y^4)$

$f_y = -4y^3(x^4+y^4) + 4y^3(x^4-y^4)$ از $(4y^3)$ فاکتور گرفتیم

$f_y = (-4y^3)(x^4+y^4-x^4+y^4)$

$f_y = -8y^7$

روش دیگر $\Rightarrow uvw = (x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4) = (x^4-y^4)(x^4+y^4) = \dots$

$\dots = (x^8-y^8) \Rightarrow f_x = 8x^7 , f_y = -8x^7$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /   Subject:

تمرین ۵: فرض کنید $f = \sin(uvw)$ ، $u = x^2 - y^2$ ، $v = x^2 + y^2$ ، $w = x^4 + y^4$ آنگاه f_x و f_y را محاسبه کنید.

$$f_x = f_u . u_x + f_v . v_x + f_w . w_x$$

$$f_x = (vw)\cos(uvw)(2x) + (uw)\cos(uvw)(2x) + (uv)\cos(uvw)(4x^3)$$

$$\Rightarrow uv = x^4 - y^4 \quad , \quad u + v = 2x^2 \quad , \quad uvw = x^8 - y^8 \Leftarrow$$

$$f_x = (2x(x^4+y^4)\cos(x^8-y^8))(u+v) + (x^4-y^4)\cos(x^8-y^8)(4x^3)$$

$$f_x = (4x^3(x^4+y^4)\cos(x^8-y^8)) + (4x^3(x^4-y^4)\cos(x^8-y^8))$$

$$f_x = 4x^3\cos(x^8-y^8)(x^4+y^4+x^4-y^4)$$

$$f_x = 8x^7\cos(x^8-y^8)$$

$$f_y = f_u . u_y + f_v . v_y + f_w . w_y$$

$$f_y = (vw)\cos(uvw)(-2y) + (uw)\cos(uvw)(2y) + (uv)\cos(uvw)(4y^3)$$

$$\Rightarrow uv = x^4 - y^4 \quad , \quad v - u = 2y^2 \quad , \quad uvw = x^8 - y^8 \Leftarrow$$

$$f_y = ((-2y)(x^4+y^4)\cos(x^8-y^8))(v-u)) + (x^4-y^4)\cos(x^8-y^8)(4y^3)$$

$$f_y = ((-4y^3)\cos(x^8-y^8)(x^4+y^4)) + ((4y^3)\cos(x^8-y^8)(x^4-y^4))$$

$$f_y = (-4y^3)\cos(x^8-y^8)(x^4+y^4-x^4+y^4)$$

$$f_y = -8y^7\cos(x^8-y^8)$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

○ مثال ○ فرض کنید $f=\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}$ و $u=x^2-y^2$ و $v=y^2-z^2$ و $w=z^2-x^2$

آنگاه نشان دهید روابط روبه رو درست اند.

① $xf_x+yf_y+zf_z=-2f$

② $\frac{f_x}{x}+\frac{f_y}{y}+\frac{f_z}{z}=0$

① $xf_x+yf_y+zf_z=-2f$

$$\begin{cases} f_x=f_u.u_x+f_v.v_x+f_w.w_x \\ f_y=f_u.u_y+f_v.v_y+f_w.w_y \\ f_z=f_u.u_z+f_v.v_z+f_w.w_z \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x\times \\ y\times \\ z\times \end{matrix}\begin{cases} f_x=2xf_u-2xf_w \\ f_y=-2yf_u+2yf_v \\ f_z=-2zf_v+2zf_w \end{cases} \Rightarrow$$

ضرب می‌کنیم

جمع می‌کنیم

فاکتورگیری می‌کنیم

$$\Rightarrow xf_x+yf_y+zf_z=2f_u(\overbrace{x^2-y^2}^{u})+2f_v(\overbrace{y^2-z^2}^{v})+2f_w(\overbrace{z^2-x^2}^{w})$$

$$\Rightarrow xf_x+yf_y+zf_z=2uf_u+2vf_v+2wf_w$$

$$\Rightarrow xf_x+yf_y+zf_z=2u\left(\frac{-1}{u^2}\right)+2v\left(\frac{-1}{v^2}\right)+2w\left(\frac{-1}{w^2}\right)$$

$$\Rightarrow xf_x+yf_y+zf_z=-2\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right)$$

$$\Rightarrow xf_x+yf_y+zf_z=-2f$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / /　　　　Subject:

(۲) $\frac{f_x}{x}+\frac{f_y}{y}+\frac{f_z}{z}=0$

$$\begin{cases} f_x = f_u.u_x + f_v.v_x + f_w.w_x \\ f_y = f_u.u_y + f_v.v_y + f_w.w_y \\ f_z = f_u.u_z + f_v.v_z + f_w.w_z \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 1/x \times \\ 1/y \times \\ 1/z \times \end{matrix} \begin{cases} f_x = 2x f_u - 2x f_w \\ f_y = -2y f_u + 2y f_v \\ f_z = -2z f_v + 2z f_w \end{cases}$$ ضرب کرده و جمع می کنیم

$$\frac{f_x}{x}+\frac{f_y}{y}+\frac{f_z}{z} = 2f_u - 2f_w - 2f_u + 2f_v - 2f_v + 2f_w$$

$$\Rightarrow \frac{f_x}{x}+\frac{f_y}{y}+\frac{f_z}{z}=0$$

مثال ○ فرض کنید $f=\frac{1}{uv}+\frac{1}{vw}+\frac{1}{wu}$ و $u=x^n-y^n$ و $v=y^n-z^n$ و $w=z^n-x^n$ ، آنگاه نشان دهید رابطه ی زیر به چه جوابی می رسد.

$$x^n f_x + y^n f_y + z^n f_z = ?$$

$$\begin{matrix} x^n \times \\ y^n \times \\ z^n \times \end{matrix} \begin{cases} f_x = f_u.u_x + f_v.v_x + f_w.w_x = (nx^{n-1})f_u - (nx^{n-1})f_w \\ f_y = f_u.u_y + f_v.v_y + f_w.w_y = -(ny^{n-1})f_u + (ny^{n-1})f_v \\ f_z = f_u.u_z + f_v.v_z + f_w.w_z = -(nz^{n-1})f_v + (nz^{n-1})f_w \end{cases}$$

بقیش زیاده حسش نیست 😊

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /   Subject:

مثال: فرض کنید $f=\ln(x^2+y^2+z^2)+\arctan\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}$ آنگاه نشان دهید رابطه زیر درست است.

$$\frac{f_x}{x}+\frac{f_y}{y}-\frac{2f_z}{z}=0$$

$$f=\underbrace{\ln(x^2+y^2+z^2)}_{u}+\underbrace{\arctan\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}_{v}$$

$$\begin{cases} f_x=f_u.u_x+f_v.v_x \\ f_y=f_u.u_y+f_v.v_y \\ f_z=f_u.u_z+f_v.v_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_x=\left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right)f_u+\left(\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}\right).f_v$$

$$\Rightarrow f_y=\left(\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\right)f_u+\left(\frac{\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}\right).f_v$$

$$\Rightarrow f_z=\left(\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)f_u+\left(\frac{\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}\right).f_v$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

$$\frac{1}{x}\times \quad f_x = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right) f_u + x\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2-1} + (x^2+y^2+z^2-1)^{3/2}\right)^{-1} . f_v$$

$$\frac{1}{y}\times \quad f_y = \left(\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\right) f_u + y\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2-1} + (x^2+y^2+z^2-1)^{3/2}\right)^{-1} . f_v$$

$$\frac{-2}{z}\times \quad f_z = \left(\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right) f_u + z\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2-1} + (x^2+y^2+z^2-1)^{3/2}\right)^{-1} . f_v$$

$$\Rightarrow \frac{f_x}{x} + \frac{f_y}{y} - \frac{2f_z}{z} = \dots$$

$$\dots = \left(\frac{2}{x^2+y^2+z^2}\right) f_u + \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2-1} + (x^2+y^2+z^2-1)^{3/2}\right)^{-1} f_v + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{2}{x^2+y^2+z^2}\right) f_u + \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2-1} + (x^2+y^2+z^2-1)^{3/2}\right)^{-1} f_v + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{-4}{x^2+y^2+z^2}\right) f_u - 2\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2-1} + (x^2+y^2+z^2-1)^{3/2}\right)^{-1} f_v = \dots$$

$$\dots = 2a f_u + b f_v + 2a f_u + b f_v - 4a f_u - 2b f_v = 0$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /   Subject:

دیفرانسیل تابع دو متغیره:

f تابعی از x و y است $\Leftarrow$ $df = f_x dx + f_y dy$

مثال:

$$\underbrace{d(x^3y^5)}_{f} = f_x dx + f_y dy = 3x^2y^5 dx + 5y^4x^3 dy$$

نکته: فرض کنید x و y مستقل از هم باشند و داشته باشیم:

$$f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = 0$$

آنگاه نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

مشتق‌گیری ضمنی

فرض کنید $f(x,y,z) = 0$ و x و y مستقل از هم باشند و z تابعی از x و y باشد آنگاه:

$$z_x = \frac{-f_x}{f_z} \quad , \quad z_y = \frac{-f_y}{f_z}$$

توضیح $\Leftarrow$ یک رابطه بین چند تا متغیر مساوی با صفر را داریم. یکی از متغیرها تابعی از بقیه‌ی متغیرها است برای محاسبه‌ی مشتق آن نسبت به بقیه‌ی متغیرها می‌توان از مشتق ضمنی استفاده کرد

نکته $\Leftarrow$ از مشتق ضمنی زمانی استفاده می‌کنیم که یک سمت تساوی صفر باشد

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

مثال ۰ فرض کنید $x^3+y^3+z^3-x^3y^3z^3$ و z تابعی از x,y باشد آنگاه نشان دهید:

$$\left(\frac{x}{z}\right) z_x - \left(\frac{y}{z}\right) z_y = \frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}$$

$$f = x^3+y^3+z^3-x^3y^3z^3 = 0$$

$$z_x = \frac{-f_x}{f_z} = \frac{-(3x^2-3x^2y^3z^3)}{3z^2-3z^2x^3y^3} = -\frac{x^2-x^2y^3z^3}{z^2-z^2x^3y^3}$$

$$z_y = \frac{-f_y}{f_z} = \frac{-(3y^2-3y^2x^3z^3)}{3z^2-3z^2x^3y^3} = -\frac{y^2-y^2x^3z^3}{z^2-z^2x^3y^3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{z}\right) z_x - \left(\frac{y}{z}\right) z_y$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{z}\right)\left(-\frac{x^2-x^2y^3z^3}{z^2-z^2x^3y^3}\right) - \left(\frac{y}{z}\right)\left(-\frac{y^2-y^2x^3z^3}{z^2-z^2x^3y^3}\right) = \frac{-x^3+y^3}{z^3-x^3y^3z^3}$$

نکته $\Rightarrow x^3+y^3+z^3 = x^3y^3z^3 \longrightarrow z^3-x^3y^3z^3 = -(x^3+y^3) \Leftarrow$ نکته

$$\Rightarrow \frac{-x^3+y^3}{z^3-x^3y^3z^3} = \frac{-(x^3-y^3)}{-(x^3+y^3)} = \frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

○ مثال ○ فرض کنید $e^{x-y}+e^{y-z}+e^{z-x}=e^{x+y-2z}$ و z تابعی از x,y باشد

آنگاه نشان دهید $z_x+z_y=1$

$$e^{x-y}+e^{y-z}+e^{z-x}-e^{x+y-2z}=0$$

$$z_x=\frac{-f_x}{f_z} \qquad z_y=\frac{-f_y}{f_z}$$

$$f_x=e^{x-y}-e^{z-x}-e^{x+y-2z}$$

$$f_y=-e^{x-y}+e^{y-z}-e^{x+y-2z}$$

$$f_z=-e^{y-z}+e^{z-x}+2e^{x+y-2z}$$

$$z_x+z_y=\left(\frac{-f_x}{f_z}\right)+\left(\frac{-f_y}{f_z}\right)=-\frac{f_x+f_y}{f_z}=\dots$$

$$\dots=-\left(\frac{-e^{z-x}+e^{y-z}-2e^{x+y-2z}}{-e^{y-z}+e^{z-x}+2e^{x+y-2z}}\right)=1$$

○ از یک منفی در صورت فاکتور می‌گیریم، صورت و مخرج یکی می‌شوند و منفی داخل پرانتز با خارج پرانتز ساده می‌شود. و نهایتاً جواب می‌شود یک.

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /　　　　　　　　　　　　　Subject:

○ فرض کنید $w = f\left(\underbrace{\frac{y-x}{xy}}_{u} , \underbrace{\frac{y-z}{yz}}_{v}\right)$ آنگاه نشان دهید:

$$x^2 \frac{\partial w}{\partial x} + y^2 \frac{\partial w}{\partial y} + z^2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$u = \frac{y-x}{xy} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \qquad v = \frac{y-z}{yz} = \frac{1}{z} - \frac{1}{y}$$

$$w = f(u, v)$$

$$w \to u \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \qquad w \to v \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$$

$$x^2 \times \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{-1/x^2} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{0}$$

$$y^2 \times \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{1/y^2} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{1/y^2}$$

$$z^2 \times \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial z}}_{0} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial z}}_{-1/z^2}$$

$$\Rightarrow x^2 \frac{\partial w}{\partial x} + y^2 \frac{\partial w}{\partial y} + z^2 \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{-\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial u} = 0$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

○ سوال امتحانی ○ فرض کنید $f(x^2-y^2, z-x^2)=0$ و z تابعی از x, y باشد آنگاه نشان دهید رابطه‌ی زیر درست است.

$$yz_x + xz_y = 2xy$$

$$f(\underbrace{x^2-y^2}_{u}, \underbrace{z-x^2}_{v}) = 0$$

• مشتق ضمنی استفاده می‌کنیم $u = x^2 - y^2 \quad v = z - x^2 \Rightarrow f(u, v) = 0$

$$f=0 \longrightarrow z_x = \frac{-f_x}{f_z}, \quad z_y = \frac{-f_y}{f_z}$$

$$f\begin{cases} u\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \\ v\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x = f_u . u_x + f_v . v_x = 2x f_u - 2x f_v \\ f_y = f_u . u_y + f_v . v_y = -2y f_u \\ f_z = f_u . u_z + f_v . v_z = f_v \end{cases}$$

$$\Rightarrow yz_x + xz_y = y\left(\frac{-f_x}{f_z}\right) + x\left(\frac{-f_y}{f_z}\right) = \dots$$

$$\dots = \frac{-\{yf_x + xf_y\}}{f_z} = \frac{-\{y(2xf_u - 2xf_v) + x(-2yf_u)\}}{f_v} = \dots$$

$$\dots = \frac{-\{2xyf_u - 2xyf_v - 2xyf_u\}}{f_v} = \frac{2xyf_v}{f_v} = 2xy$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

تمرین: فرض کنید $f(x-z, y-z)=0$ و z تابعی از x, y باشد آنگاه نشان دهید رابطه‌ی زیر درست است.

$$z_x + z_y = 1$$

$$f(\underbrace{x-z}_{u}, \underbrace{y-z}_{v}) \qquad z_x = \frac{-f_x}{f_z} \qquad z_y = \frac{-f_y}{f_z}$$

$$\begin{cases} f_x = f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x = f_u \\ f_y = f_u \cdot u_y + f_v \cdot v_y = f_v \\ f_z = f_u \cdot u_z + f_v \cdot v_z = -f_u - f_v \end{cases}$$

$$z_x + z_y = \frac{-f_u}{-f_u - f_v} + \frac{-f_v}{-f_u - f_v} = \frac{-(f_u + f_v)}{-(f_u + f_v)} = 1$$

تمرین: فرض کنید $f(\underbrace{x+y-z}_{u}, \underbrace{x^2+y^2}_{v})=0$ و z تابعی از x, y باشد نشان دهید رابطه زیر درست است.

$$y z_x - x z_y = y - x \qquad z_x = \frac{-f_x}{f_z} \qquad z_y = \frac{-f_y}{f_z}$$

$$\begin{cases} f_x = f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x = f_u + 2x f_v \\ f_y = f_u \cdot u_y + f_v \cdot v_y = f_u + 2y f_v \\ f_z = f_u \cdot u_z + f_v \cdot v_z = -f_u \end{cases}$$

$$y z_x = y \frac{(-(f_u + 2x f_v))}{-f_u} \qquad x z_y = x \frac{(-(f_u + 2y f_v))}{-f_u}$$

$$y z_x - x z_x = \frac{y f_u + 2xy f_v - x f_u - 2xy f_v}{f_u} = \frac{y f_u - x f_u}{f_u} = \dots$$

$$\dots = \frac{f_u (y-x)}{f_u} = y - x$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

تمرین ۵ فرض کنید $f(z-\frac{1}{x} , z+\frac{1}{y})=0$ و z تابعی از x,y باشد آنگاه نشان دهید رابطه‌ی روبه‌رو درست است.

$$y^2 z_y - x^2 z_x = 1$$

$$f(\underbrace{z-\frac{1}{x}}_{u} , \underbrace{z+\frac{1}{y}}_{v}) = 0 \qquad z_x = \frac{-f_x}{f_z} \qquad z_y = \frac{-f_y}{f_z}$$

$$\begin{cases} f_x = f_u . u_x + f_v . v_x = 1/x^2 \, f_u \\ f_y = f_u . u_y + f_v . v_y = -1/y^2 \, f_v \\ f_z = f_u . u_z + f_v . v_z = f_u + f_v \end{cases}$$

$$y^2 z_y - x^2 z_x = y^2\left(\frac{1/y^2 \, f_v}{f_u + f_v}\right) - x^2\left(\frac{-1/x^2 \, f_u}{f_u+f_v}\right) = \dots$$

$$\dots = \frac{f_v - (-f_u)}{f_u + f_v} = \frac{f_u + f_v}{f_u + f_v} = 1$$

ژاکوبین: F و G توابعی از x,y اند

$$y = \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)$$

توضیح: دوتا رابطه بین چند متغیر مساوی با صفر که در آن دوتا از متغیرها تابعی از بقیه‌ی متغیرها می‌باشد. برای محاسبه‌ی مشتقات آن‌ها از ژاکوبین استفاده می‌کنیم.

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

فرض کنید $F(x,y,u,v)$ و $G(x,y,u,v)$ ، u,v توابعی از x,y اند و x,y مستقل اند

$$u_x = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \qquad u_y = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$v_x = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \qquad v_y = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

مثال: فرض کنید $\begin{cases} u^2+v^2=x+y \\ u^3+v^3=x-y \end{cases}$ ، u,v توابعی از x,y باشند

آنگاه $\frac{u_x}{u_y}$ را محاسبه کنید

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

$$\begin{cases} F = u^۲ + v^۲ - x - y = ۰ \\ G = u^۳ + v^۳ - x + y = ۰ \end{cases}$$

$$u_x = \frac{-\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = \frac{-\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} -۱ & ۲v \\ -۱ & ۳v^۲ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۲u & ۲v \\ ۳u^۲ & ۳v^۲ \end{vmatrix}} = \dots$$

$$\dots = \frac{-(-۳v^۲ + ۲v)}{(۲u)(۳v^۲) - (۳u^۲ \times ۲v)} = \frac{۳v^۲ - ۲v}{۶uv(v-u)} = \frac{۳v - ۲}{۶u(v-u)}$$

$$u_y = \frac{-\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = \frac{-\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} -۱ & ۲v \\ ۱ & ۳v^۲ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۲u & ۲v \\ ۳u^۲ & ۳v^۲ \end{vmatrix}} = \dots$$

$$\dots = \frac{-(-۳v^۲ - ۲v)}{(۲u)(۳v^۲) - (۳u^۲ \times ۲v)} = \frac{۳v^۲ + ۲v}{۶uv(v-u)} = \frac{۳v + ۲}{۶u(v-u)}$$

$$\frac{u_x}{u_y} = \frac{\dfrac{۳v - ۲}{۶u(v-u)}}{\dfrac{۳v + ۲}{۶u(v-u)}} = \frac{۳v - ۲}{۳v + ۲}$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

بردار گرادیان

فرض کنید f تابعی از x, y, z باشد

$$\vec{\nabla} f = (f_x, f_y, f_z) = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$$

مثال ⇐ $f = x^2y^2z^2 + \sin x + \sin y + \sin z$

$$\begin{cases} f_x = 2xy^2z^2 + \cos x \\ f_y = 2yx^2z^2 + \cos y \\ f_z = 2zx^2y^2 + \cos z \end{cases} \Rightarrow \vec{\nabla} f = (f_x, f_y, f_z)$$

مشتق جهتی (سویی)

مشتق سویی تابع $f(x, y, z)$ در نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ در جهت بردار $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$D_u f(P_0) = \vec{\nabla} f(P_0) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

($\vec{\nabla} f(P_0)$: بردار گرادیان — ضرب نقطه‌ای — $\vec{u}$: بردار یکه)

مثال: مشتق جهتی تابع $f = x^3y^4z^5 + x^2 + y^2 + z^2$ را در نقطه‌ی $P_0 = (1, -1, 1)$ در جهت بردار $u = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ محاسبه کنید.

$$\vec{\nabla} f = (3x^2y^4z^5 + 2x,\ 4x^3y^3z^5 + 2y,\ 5x^3y^4z^4 + 2z)$$

$$\nabla f(1, -1, 1) = (5, -6, 7) \qquad |\vec{u}| = \sqrt{9} = 3$$

$$D_u f(P_0) = \vec{\nabla} f(P_0) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = (5, -6, 7) \cdot \frac{(2, 2, 1)}{3} = \frac{\{10 - 12 + 7\}}{3} = \frac{5}{3}$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

○ مثال ○ مشتق سویی تابع $f = x + y^2 + z^3$ را در لحظه‌ی $t = \pi$ در جهت بردار یکه‌ی مماس بر منحنی $\vec{r}(t) = (\sin t)\vec{i} + (\cos t)\vec{j} + t\vec{k}$ در نقطه‌ی P_0 روی منحنی محاسبه کنید.

$$\vec{\nabla} f = (f_x, f_y, f_z) = (1, 2y, 3z^2)$$

$$t = \pi \Rightarrow P_0 = \vec{r}(\pi) = (\sin\pi, \cos\pi, \pi) = (0, -1, \pi)$$

یکه‌مماس $$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{(\cos\pi, -\sin\pi, 1)}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{u} = \vec{T}(\pi) = \frac{(\cos\pi, -\sin\pi, 1)}{\sqrt{2}} = \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{\nabla} f(P_0) = (1, -2, 3\pi^2)$$

$$D_u f(P_0) = \vec{\nabla} f(P_0) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = (1, -2, 3\pi^2) \cdot \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi^2 - 1}{\sqrt{2}}$$

صفحه‌ی مماس و خط قائم بر یک سطح (رویه)

$F(x, y, z) = 0$ معرف یک سطح یا رویه در فضاست

○ معادله‌ی کره با مرکز مبدأ و شعاع a ① $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$

○ معادله‌ی مخروط ② $F(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2 = 0$

○ معادله‌ی سهمی‌گون (کله‌قند) ③ $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2 = 0$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

نکته ○ ⟸ $\vec{\nabla} f(P_0)$ بردار نرمال صفحه‌ی مماس یا خط عمود بر سطح $f(x,y,z)=0$ در نقطه‌ی P_0 است.

مثال ○ صفحه مماس و خط قائم بر سطح $x^3+y^5+z^7=x^3y^5z^7+2$ را در نقطه‌ی $(1,-1,1)$ بدست آورید.

$$x^3+y^5+z^7-x^3y^5z^7-2=0$$

$$\vec{\nabla} f=(3x^2-3x^2y^5z^7,\ 5y^4-5x^3y^4z^7,\ 7z^6-7x^3y^5z^6)$$

$$u=\nabla f(\underbrace{1}_{x_0},\underbrace{-1}_{y_0},\underbrace{1}_{z_0})=(\underbrace{6}_{a},\underbrace{0}_{b},\underbrace{14}_{c})$$

صفحه‌ی مماس $\Rightarrow$ $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

خط عمود $\Rightarrow$ $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$

معادله‌ی خط مماس بر منحنی حاصل از تقاطع دو رویه

نکته مهم ○ از تقاطع دو سطح $F(x,y,z)=0$ و $G(x,y,z)=0$ در فضا یک منحنی ایجاد می‌شود
برای بدست آوردن بردار نرمال خط مماس بر این منحنی در نقطه‌ی P_0 روی آن کافیست
بردار گرادیان های F و G را در این نقطه محاسبه کرده و در هم ضرب خارجی کنیم

بردار نرمال خط مماس $\vec{u}=\vec{\nabla} F(P_0)\times\vec{\nabla} G(P_0)$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /   Subject:

مثال ٥ معادله‌ی خط مماس بر منحنی حاصل از تقاطع رویه‌های زیر را در نقطه‌ی $P_0=(1,-1,1)$ بدست آورید

$$x^3 + y^5 + z^7 = x^3 y^3 z^3 + 2$$

$$xyz = x + y + z - 2$$

$$\vec{F} = x^3 + y^5 + z^7 - x^3 y^3 z^3 - 2 = 0$$
$$\vec{G} = xyz - x - y - z + 2 = 0$$

$$\vec{\nabla} F = (3x^2 - 3x^2y^3z^3 \,,\, 5y^4 - 3x^3y^2z^3 \,,\, 7z^6 - 3x^3y^3z^2)$$
$$\vec{\nabla} G = (yz - 1 \,,\, xz - 1 \,,\, xy - 1)$$

$$\vec{\nabla} F(1,-1,1) = (6, 2, 10)$$
$$\vec{\nabla} G(1,-1,1) = (-2, 0, -2)$$

$$\vec{u} = \vec{\nabla} F \times \vec{\nabla} G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 2 & 10 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 8\vec{j} + 4\vec{k} = (\underbrace{-4}_{a}, \underbrace{-8}_{b}, \underbrace{4}_{c})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x - 1}{-4} = \frac{y + 1}{-8} = \frac{z - 1}{4}$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

○ تمرین ○ خط مماس بر منحنی حاصل از تقاطع رویه‌های زیر را در نقطه‌ی $P_0=(1,1,1)$ بدست آورید

$$\begin{cases} xy + xz + yz = 3 \\ x + xz + z = 3 \end{cases}$$

جواب ⇐ « $\vec{u} = (4, 0, -4)$ »

$\vec{F} = xy + xz + yz - 3 = 0$

$\vec{G} = x + xz + z - 3 = 0$

$\vec{\nabla F} = (y+z \,,\, x+z \,,\, x+y)$

$\vec{\nabla G} = (1+z \,,\, 0 \,,\, x+1)$

$\vec{\nabla F}(1,1,1) = (2, 2, 2)$

$\vec{\nabla G}(1,1,1) = (2, 0, 2)$

$$\vec{u} = \vec{\nabla F} \times \vec{\nabla G} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 0\vec{j} - 4\vec{k} = (\underbrace{4}_{a}, \underbrace{0}_{b}, \underbrace{-4}_{c})$$

$$\Rightarrow \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \Rightarrow \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{-4}$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

اکسترمم های نسبی توابع دومتغیره

○ برای بدست آوردن اکسترمم های نسبی تابع $f(x,y)$ ابتدا دستگاه زیر را حل می کنیم:

①

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{جواب}} (x_0, y_0)$$

②

$$\Delta = \left\{ f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 \right\} \Big|_{(x_0, y_0)}$$

• مقدارش را در این نقطه جایگذاری می کنیم

③

① اگر $\Delta = 0$ باشد آنگاه این آزمون جواب نمی دهد (آزمون سکوت می کند).

② اگر $\Delta < 0$ باشد آنگاه نقطه ی (x_0, y_0) نقطه ی زینی است.

③ اگر $\Delta > 0$ باشد آنگاه نقطه ی (x_0, y_0) نقطه ی اکسترمم است که نوع آن به صورت زیر تعیین می شود:

④

① اگر $f_{xx}(x_0, y_0) = 0$ باشد آنگاه این آزمون جواب نمی دهد

② اگر $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ باشد آنگاه نقطه ی (x_0, y_0) نقطه ی max نسبی است

③ اگر $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ باشد آنگاه نقطه ی (x_0, y_0) نقطه ی min نسبی است

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /

Subject:

مثال ۵ اکستریمم های نسبی تابع زیر را بدست آورید

$f = x^3 + y^3 - 3xy - 4x - 4y$

$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3y - 4 = 0 \\ f_y = 3y^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y = 2 & (1) \\ y^2 - x = 2 & (2) \end{cases}$

حال این دو را از هم کم می کنیم

$\Rightarrow x^2 - y^2 + x - y = 0$

$\Rightarrow (x-y)(x+y) + (x-y) = 0$

$\Rightarrow$ فاکتور $\Rightarrow (x-y)(x+y+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \rightarrow x = y & (3) \\ x + y + 1 = 0 \rightarrow y = -(x+1) & (4) \end{cases}$

$\Rightarrow (3) \curvearrowright (1) \Rightarrow x^2 - x = 2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}, \boxed{x = -1}$

$x = y \; (3) \Rightarrow \begin{cases} A_1 = (2, 2) \\ A_2 = (-1, -1) \end{cases}$

$\Rightarrow (4) \curvearrowright (1) \Rightarrow x^2 + x + 1 = 2 \rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow y = -(x+1) \rightarrow y = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\quad A_3 = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$x = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow y = -(x+1) \rightarrow y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $\quad A_4 = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

ادامه در صفحه ی بعد ....

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

$$\begin{cases} f_{xx} = ۶x \\ f_{yy} = ۶y \\ f_{xy} = -۳ \end{cases} \rightarrow \Delta = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^۲$$

$$\Delta = (۶x)(۶y) - (-۳)^۲ = ۳۶xy - ۹$$

$$\Delta(۲,۲) = ۳۶ \times ۲ \times ۲ - ۹ > ۰$$

$$\Delta(-۱,-۱) = ۳۶(-۱)(-۱) - ۹ = ۳۶ - ۹ > ۰$$

$f_{xx}(۲,۲) = ۶ \times ۲ > ۰ \longrightarrow$ min نقطه $(۲,۲)$

$f_{xx}(-۱,-۱) = ۶(-۱) = -۶ < ۰ \longrightarrow$ max نقطه $(-۱,-۱)$

$\Delta(A_۳) = \Delta(A_۴) = -۴۵ < ۰$ $A_۳$ و $A_۴$ نقاط زینی هستند

$$\Delta(A_۳) = \Delta\left(\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}, -\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right) = \ldots$$

$$\ldots = ۳۶\left(\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)\left(\frac{-۱-\sqrt{۵}}{۲}\right) - ۹ = \ldots$$

$$\ldots = -۳۶\left(\frac{۵-۱}{۴}\right) - ۹ = -۳۶ - ۹ = -۴۵$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

مثال ۵ اکسترمم های نسبی تابع زیر را بدست آورید

$f = x^3 + y^3 - 3xy$

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0 \quad ① \\ y^2 - x = 0 \quad ② \end{cases}$$

حال این دو را از هم کم می کنیم

$$(x^2 - y^2) + (x - y) = 0 \Rightarrow (x-y)(x+y) + (x-y) = 0$$

$$\Rightarrow \text{فاکتور} \Rightarrow (x-y)(x+y+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \rightarrow x = y \quad ③ \\ x + y + 1 = 0 \rightarrow y = -(x+1) \quad ④ \end{cases}$$

$$③ \rightarrow ① \Rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow \boxed{x = 0}, \boxed{x = 1}$$

$$x = y \rightarrow \begin{cases} A_1 = (0, 0) \\ A_2 = (1, 1) \end{cases}$$

$$④ \rightarrow ① \Rightarrow (-(x+1))^2 - x = 0 \rightarrow x^2 + 1 + 2x - x = 0$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = -3 < 0$$ ریشه ندارد

$$\begin{cases} f_{xx} = 6x \\ f_{yy} = 6y \\ f_{xy} = -3 \end{cases}$$

$$\Delta = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

$$\Delta = 36(x)(y) - 9$$

$\Delta(A_1) = \Delta(0, 0) = -9$ A_1 نقطه ی زینی است

$\Delta(A_2) = \Delta(1, 1) = 36 - 9 = 27 \Rightarrow f_{xx}(1,1) = 6 > 0 \Leftarrow$ نقطه min

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

مثال ۵ ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 16x^2y^2$$

۵ درجاهایی که x و y نسبت به هم تقارن دارند باید جواب هر دو یکسان باشد

$$\begin{cases} f_x = -1/x^2 + 32xy^2 = 0 \\ f_y = -1/y^2 + 32x^2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2} = 32xy^2 \\ \frac{1}{y^2} = 32x^2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 32x^3y^2 = 1 \\ 32x^2y^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow 32x^3y^2 = 32x^2y^3 \Rightarrow \boxed{x = y}$$

$$\Rightarrow x = y \rightarrow 32x^3y^2 = 1 \rightarrow 32x^5 = 1 \rightarrow x = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = x = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} f_{xx} = 2/x^3 + 32y^2 \\ f_{yy} = 2/y^3 + 32x^2 \\ f_{xy} = 64xy \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = \left(\frac{2}{x^3} + 32y^2\right)\left(\frac{2}{y^3} + 32x^2\right) - (64xy)^2$$

$$\begin{cases} \Delta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 24^2 - 16^2 > 0 \\ f_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 24 > 0 \rightarrow \end{cases}$$

A نقطه min نسبی است

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

مثال ○ اکسترمم های نسبی تابع زیر را پیدا کنید

$f = xy(9 - x - y)$

$f = 9xy - x^2y - xy^2$

$\begin{cases} f_x = 9y - 2xy - y^2 = 0 & ① \\ f_y = 9x - x^2 - 2xy = 0 & ② \end{cases}$

حال این دو را از هم کم می کنیم

$\Rightarrow 9y - 9x + x^2 - y^2 = 0$

$\Rightarrow -9(x-y) + (x-y)(x+y) = 0$

$\Rightarrow$ فاکتور $\Rightarrow (x-y)(x+y-9) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \Rightarrow x = y & ③ \\ x + y - 9 = 0 \Rightarrow x + y = 9 \Rightarrow y = 9 - x & ④ \end{cases}$

③ → ① $\Rightarrow 9x - 2x^2 - x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 9x = 0$

$\Rightarrow x(3x - 9) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow A_1 = (0, 0) \\ x = 3 \Rightarrow A_2 = (3, 3) \end{cases}$

④ → ② $9x - x^2 - 2x(9 - x) = 0$

$\Rightarrow 9x - x^2 - 18x + 2x^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 9x = 0 \Rightarrow x(x - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, & y = 9 \\ x = 9, & y = 0 \end{cases}$

$A_3 = (0, 9) \qquad A_4 = (9, 0)$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /   Subject:

$$\begin{cases} f_{xx} = -۲y \\ f_{yy} = -۲x \\ f_{xy} = ۹-۲x-۲y \end{cases} \quad \Delta = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^۲$$

$$\Delta = ۴(x)(y) - (۹-۲x-۲y)^۲$$

$\Delta(A_۱) = \Delta(۰,۰) = -۹^۲ < ۰ \Rightarrow$ زینی

$\Delta(A_۲) = \Delta(۳,۳) = ۳۶ - (۹-۶-۶)^۲ = ۳۶ - ۹ = ۲۷ > ۰$

$f_{xx} = -۲y \Rightarrow f_{xx}(x_۰,y_۰) = -۲(۳) = -۶ < ۰ \Rightarrow max$

$\Delta(A_۳) = \Delta(۰,۹) = -(۹-۱۸)^۲ = -۹^۲ < ۰$

$\Delta(A_۴) = \Delta(۹,۰) = -(۹-۱۸)^۲ = -۹^۲ < ۰$

$\Rightarrow$ زینی

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /　　　　　　　　　　　　　　Subject:

اکسترمم های شرطی (ضرایب لاگرانژ)

برای بدست آوردن max یا min تابع $f(x,y,z)$ تحت شرط $g(x,y,z)=0$ کافی است دستگاه زیر را حل کنیم

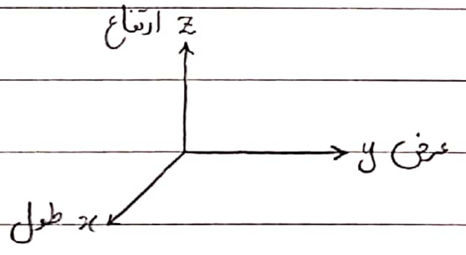
$$\begin{cases}\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \\ g=0\end{cases}$$

و تحت دو شرط $g_1=0$ و $g_2=0$ جواب دستگاه زیر را پیدا کنیم

$$\begin{cases}\vec{\nabla} f = \lambda_1 \vec{\nabla} g_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} g_2 \\ g_1=0 \\ g_2=0\end{cases}$$

λ و λ_1 و λ_2 را ضرایب لاگرانژ گویند

مثال: طبق مقررات پستی باید مجموع ارتفاع و محیط قاعده‌ی یک بسته‌ی پستی مکعبی شکل L باید باشد. ابعاد حجیم‌ترین مکعب مستطیلی را با این شرط پیدا کنید.



L = محیط قاعده + ارتفاع

$$z + 2(x+y) = L$$

شرط ⇐ $g = 2x + 2y + z - L = 0$

تابع حجم مکعب ⇒ $f = xyz$

پس ماکزیمم f را تحت $g=0$ پیدا کنیم

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / /

Subject:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \\ g = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (f_x , f_y , f_z) = \lambda (g_x , g_y , g_z) \\ g = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (yz , xz , xy) = \lambda (۲, ۲, ۱) = (۲\lambda , ۲\lambda , \lambda) \\ ۲x + ۲y + z - L = ۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ① \; yz = ۲\lambda \\ ۲ \; xz = ۲\lambda \\ ۳ \; xy = \lambda \\ ۴ \; ۲x + ۲y + z = L \end{cases}$$

① , ۲ $\xrightarrow{\text{تقسیم}} \dfrac{yz}{xz} = \dfrac{۲\lambda}{۲\lambda} = ۱ \longrightarrow y/x = ۱ \longrightarrow \boxed{y = x}$ (۵)

۲ , ۳ $\xrightarrow{\text{تقسیم}} \dfrac{xz}{xy} = \dfrac{۲\lambda}{\lambda} \longrightarrow z/y = ۲ \longrightarrow \boxed{z = ۲y}$ (۶)

(۴) , (۵) , (۶) $\Rightarrow ۲y + ۲y + ۲y = L \Rightarrow ۶y = L \Rightarrow y = \dfrac{L}{۶}$

$x = y \Rightarrow x = \dfrac{L}{۶}$ $\qquad z = ۲y = ۲ \times \dfrac{L}{۶} = \dfrac{L}{۳}$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

۵- کوتاه‌ترین فاصله‌ی سطح $xyz^2 = 32$ را از مبدأ مختصات پیدا کنید.

توضیح ⇐ یکبار مختصات (x, y, z) را در فضا در نظر می‌گیریم. فاصله‌ی این نقطه تا مبدأ مختصات

توسط تابع $d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ بدست می‌آید. بنابراین min این تابع را تحت

شرط اینکه نقطه‌ی (x, y, z) روی سطح واقع شود بدست می‌آوریم بنابراین برای سادگی در محاسبات

min تابع $h(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ را تحت شرط $g = xyz^2 - 32 = 0$ بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases} \vec{\nabla} h = \lambda \vec{\nabla} g \\ g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (h_x, h_y, h_z) = \lambda (g_x, g_y, g_z) \\ g = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x, 2y, 2z) = \lambda (yz^2, xz^2, 2xyz) \\ xyz^2 - 32 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \lambda yz^2 \quad (1) \\ 2y = \lambda xz^2 \quad (2) \\ 2z = \lambda 2xyz \quad (3) \\ xyz^2 = 32 \quad (4) \end{cases}$$

$$(1),(2): \frac{2x}{2y} = \frac{\lambda yz^2}{\lambda xz^2} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{x} \Rightarrow x = \pm y \quad (5)$$

$$(2),(3): \frac{2y}{2z} = \frac{\lambda xz^2}{\lambda 2xyz} \Rightarrow \frac{y}{z} = \frac{z}{2y} \Rightarrow z^2 = 2y^2 \quad (6)$$

$$(5,6) \rightarrow (4) \Rightarrow (\pm y)(y)(2y^2) = 32 \Rightarrow y^4 = \pm 16$$

حالت $x = -y$ نمی‌تواند درست باشد چون به $y^4 = -16$ می‌رسیم

iman NOTEBOOK

Date: / /

Subject:

$x = y \Rightarrow y^4 = 16 \Rightarrow y = \pm 2$

$z^2 = 2y^2 = 2(\pm 2)^2 = 8 \Rightarrow z^2 = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

$A = (x = 2 , y = 2 , z = \pm 2\sqrt{2})$

$B = (x = -2 , y = -2 , z = \pm 2\sqrt{2})$

نکته‌ی مهم: هرگاه از معادله‌ی شرط بتوانیم یکی از متغیرها را برحسب دوتای دیگر محاسبه کنیم، این کار را انجام داده و در تابع اصلی جایگذاری می‌کنیم. مثلاً z را برحسب y و x بدست می‌آوریم و در تابعی که می‌خواهیم بدست بیاوریم، جایگذاری می‌کنیم. در نهایت یک تابع دو متغیره برحسب y و x بدست می‌آید که اکسترمم هایش را بدست می‌آوریم.

$xyz^2 = 32 \Rightarrow z^2 = \frac{32}{xy}$

$h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + \frac{32}{xy}$

حال باید اکسترمم های تابع « $f = x^2 + y^2 + \frac{32}{xy}$ » را بدست بیاوریم.

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

$f = x^۲ + y^۲ + \frac{۳۲}{xy}$

$f_x = ۲x - ۳۲/x^۲y = ۰ \longrightarrow x^۳y = ۱۶$ (۱)

$f_y = ۲y - ۳۲/xy^۲ = ۰ \longrightarrow xy^۳ = ۱۶$ (۲)

$x^۳y = xy^۳ \rightarrow x^۳y - xy^۳ = ۰$

$\rightarrow xy(x^۲ - y^۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۰ & (۳) \\ y = ۰ & (۴) \\ x^۲ = y^۲ \rightarrow x = \pm y & (۵) \end{cases}$

(۵) → (۱) $\Rightarrow x^۳(x) = ۱۶ \rightarrow x^۴ = ۱۶ \rightarrow x = \pm ۲$

$A_۱ = (۲, ۲)$ $A_۲ = (-۲, -۲)$

$f_{xx} = ۲ - ۳۲/y \times -۲x/x^۴ = ۲ + ۶۴/x^۳y$

$f_{yy} = ۲ - ۳۲/x \times -۲y/y^۴ = ۲ + ۶۴/xy^۳$

$f_{xy} = -۳۲/x^۲ \times -۱/y^۲ = ۳۲/x^۲y^۲$

$\Delta(A_۱) = \Delta(۲,۲) = \{۶ \times ۶ - (۲)^۲\} = ۳۲ > ۰$

$\Delta(A_۲) = \Delta(-۲,-۲) = \{۶ \times ۶ - (۲)^۲\} = ۳۲ > ۰$

$f_{xx}(A_۱) = ۶ > ۰ \Rightarrow \min : A_۱$ $f_{xx}(A_۲) = ۶ > ۰ \Rightarrow \min : A_۲$

$z^۲(A_۱) = \frac{۳۲}{۴} = ۸ \Rightarrow z = \pm ۲\sqrt{۲}$ $z^۲(A_۲) = \frac{۳۲}{۴} = ۸ \Rightarrow z = \pm ۲\sqrt{۲}$

$A_۱ = (۲, ۲, \pm ۲\sqrt{۲})$ $A_۲ = (-۲, -۲, \pm ۲\sqrt{۲})$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /

Subject:

انتگرال دوگانه

فرض کنید D یک ناحیه‌ی بسته در صفحه‌ی xy باشد (D اغلب توسط چندین منحنی محدود می‌شود)

انتگرال دوگانه‌ی تابع $f(x,y)$ روی ناحیه‌ی D به صورت زیر تعریف می‌شود.

$dA = dy\,dx = dx\,dy$ المان مساحت

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_D \{f(x,y)\,dy\}\,dx = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

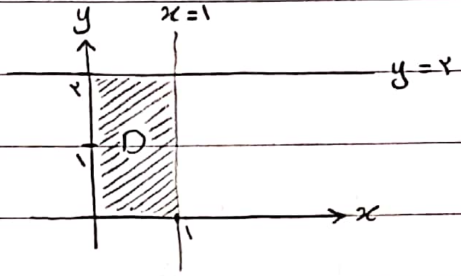
ابتدا انتگرال داخلی را نسبت به y حل می‌کنیم

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

○ مثال ○ انتگرال دوگانهٔ زیر را محاسبه کنید که در آن D یک مستطیل محدود به خطوط $x=0$ و $x=1$ ، $y=0$ و $y=2$ است.

$$I = \iint_D x^2 y^3 \, dA$$



$$I = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=2} x^2y^3 \, dy\, dx \Rightarrow I = \int_{x=0}^{x=1} \frac{x^2 y^4}{4} \Big|_{y=0}^{y=2} dx$$

$$\Rightarrow I = \int_{x=0}^{x=1} \frac{x^2}{4} (2^4 - 0^2) \, dx \Rightarrow I = \int_{x=0}^{x=1} 4x^2 \, dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{4}{3} x^3 \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{4}{3}$$

○ حال جای dx و dy را عوض می‌کنیم (جواب همان می‌شود، فرقی نمی‌کند)

$$I = \int_{y=0}^{y=2} \int_{x=0}^{x=1} x^2y^3 \, dx\, dy \Rightarrow I = \int_{y=0}^{y=1} \frac{x^3 y^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=1} dy$$

$$\Rightarrow I = \int_{y=0}^{y=1} \frac{y^3}{3} \, dy = \frac{y^4}{12} \Big|_{y=0}^{y=2} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

مثال ۰ انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\iint_D \cos(2x+3y)\,dA \qquad D: \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \pi \;,\; \frac{\pi}{4} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

- $\int \cos(ax+b)\,dx = 1/a \sin(ax+b)$
- $\int \sin(ax+b)\,dx = -1/a \cos(ax+b)$

$$\int_{x=\frac{\pi}{3}}^{x=\pi} \int_{y=\frac{\pi}{4}}^{y=\frac{\pi}{2}} \cos(2x+3y)\,dy\,dx$$

$$\int_{x=\frac{\pi}{3}}^{x=\pi} \frac{1}{3}\sin(2x+3y)\Big|_{y=\frac{\pi}{4}}^{y=\frac{\pi}{2}} dx$$

$$\frac{1}{3}\int_{x=\frac{\pi}{3}}^{x=\pi} \left(\sin\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right) dx$$

$$\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right)\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}^{x=\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}\left\{\left(\underbrace{-\cos\left(2\pi+\frac{3\pi}{2}\right)}_{0} + \underbrace{\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)}_{0}\right) - \left(\underbrace{-\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)}_{\Downarrow}\right)\right\}$$

نکته محاسبه

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

نکته محاسبه:

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{4\pi+9\pi}{6} = \frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{4\pi+3\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{4}\left\{(0-0)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right\} = \frac{1}{4}\left\{\sqrt{3}\right\} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

○ حال این سوال را با عوض کردن جای dx و dy حل می‌کنیم. جواب همان می‌شود فرقی نمی‌کند.

$$\int_{y=\frac{\pi}{6}}^{y=\frac{\pi}{2}} \int_{x=\frac{\pi}{3}}^{x=\pi} \cos(2x+3y)\, dx\, dy$$

ادامه در صفحه‌ی بعد...

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

$$\int_{y=\frac{\pi}{۶}}^{y=\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{۲}\sin(۲x+۳y)\Big|_{x=\frac{\pi}{۳}}^{x=\pi} \, dy$$

$$\frac{۱}{۲}\int_{y=\frac{\pi}{۶}}^{y=\frac{\pi}{۲}} \left(\sin(۲\pi+۳y)-\sin\left(\frac{۲\pi}{۳}+۳y\right)\right) dy$$

$$\frac{۱}{۲}\left(-\frac{۱}{۳}\cos(۲\pi+۳y)+\cos\left(\frac{۲\pi}{۳}+۳y\right)\right)\Bigg|_{y=\frac{\pi}{۶}}^{y=\frac{\pi}{۲}}$$

$$\frac{۱}{۶}\left\{\left(\underbrace{-\cos\left(۲\pi+\frac{۳\pi}{۲}\right)}_{۰}+\underbrace{\cos\left(\frac{۲\pi}{۳}+\frac{۳\pi}{۲}\right)}_{\text{نکته محاسبه}}\right)-\left(\underbrace{-\cos\left(۲\pi+\frac{\pi}{۲}\right)}_{۰}+\underbrace{\cos\left(\frac{۲\pi}{۳}+\frac{\pi}{۲}\right)}_{\text{نکته محاسبه}}\right)\right\}$$

نکته محاسبه:

$$\cos\left(\frac{۲\pi}{۳}+\frac{۳\pi}{۲}\right)=\dots=\cos\left(۲\pi+\frac{\pi}{۶}\right)=\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۴\pi+۹\pi}{۶}=\frac{۱۳\pi}{۶}=۲\pi+\frac{\pi}{۶}$$

$$\cos\left(\frac{۲\pi}{۳}+\frac{\pi}{۲}\right)=\dots=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{۶}\right)=-\cos\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۴\pi+۳\pi}{۶}=\frac{۷\pi}{۶}=\pi+\frac{\pi}{۶}$$

$$\frac{۱}{۶}\left\{\left(۰+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)-\left(۰+\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)\right)\right\}=\frac{۱}{۶}\left\{\sqrt{۳}\right\}=\frac{\sqrt{۳}}{۶}$$

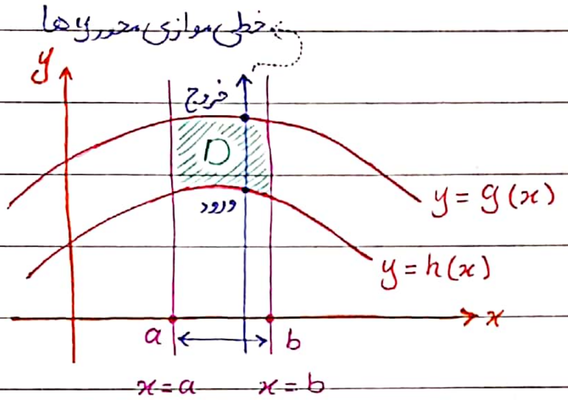
iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /　　　Subject:

تعیین حدود انتگرال دوگانه

○ ناحیه‌ی انتگرال گیری منظم اغلب ناحیه‌ای است که بین دو خط موازی محور y ها و دو تا منحنی واقع است، و یا، بین دو خط موازی محور x ها و دو تا منحنی واقع است.



$$\iint f(x,y)\,dA = \int_{x=a}^{x=b}\int_{y=h(x)}^{y=g(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

(حد بالای انتگرال بیرونی: بیشینه‌ی مقدار x — حد پایین: کمترین مقدار x؛ حد بالای انتگرال داخلی: خروج — حد پایین: ورود؛ dy: ابتدا خطی موازی محور y ها رسم می کنیم)

○ برای تعیین حدود انتگرال دوگانه به صورت زیر عمل می کنیم:

۱- ابتدا می نویسیم $dA = dy\,dx$

۲- در ناحیه‌ی مورد نظر، خطی را موازی محور y ها رسم می کنیم. منحنی‌های ورودی و خروجی را به صورت $y = h(x)$ و $y = g(x)$ بدست می آوریم. یعنی y را به صورت تابعی از x در ورود و خروج بدست می آوریم. تابع ورودی حد پایین انتگرال داخلی و تابع خروجی حد بالای آن را تعیین می کند.

۳- کمترین و بیشترین مقدار x را در ناحیه‌ی مورد نظر بدست می آوریم. کمترین مقدار حد پایین و بیشترین مقدار حد بالای انتگرال بیرونی را تعیین می کند.

نکته ⇐ اولین گام برای حل انتگرال دوگانه، رسم ناحیه‌ی انتگرال گیری است.

نکته ⇐ همیشه حدود انتگرال بیرونی عدد ثابت و حدود انتگرال داخلی، یا ثابت یا متغیر، خواهد بود.

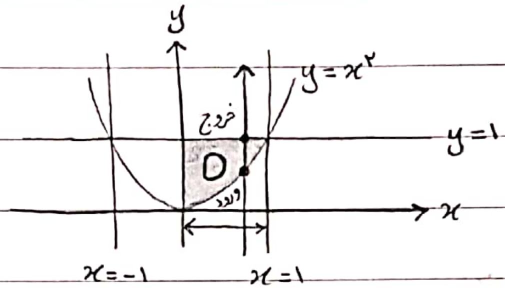
NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

○ انتگرال دوگانه‌ی زیر را محاسبه کنید که در آن D ناحیه‌ی محدود به محور y ها و منحنی $y = x^2$ و خط $y = 1$ در ربع اول است.

$$I = \iint_D 5x^3 y^4 \, dA$$

○ نخست $dA = dy\,dx$



$y = x^2$

$y = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

$$I = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x^2}^{y=1} 5x^3 y^4 \, dy\,dx$$

$$I = \int_{x=0}^{x=1} (x^3 y^5) \Big|_{y=x^2}^{y=1} dx$$

$$I = \int_{x=0}^{x=1} x^3 \left(1^5 - (x^2)^5\right) dx$$

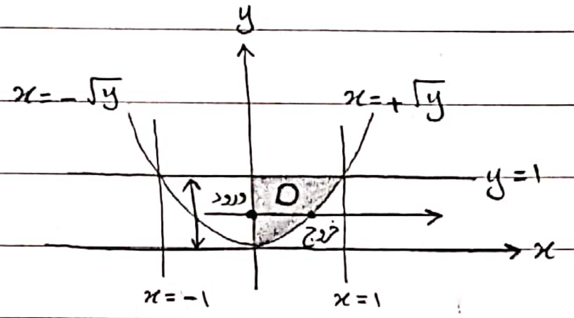
$$I = \int_{x=0}^{x=1} (x^3 - x^{13}) \, dx$$

$$I = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^{14}}{14} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{14} = \frac{5}{28}$$

Date: / / Subject:

$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$ $dA = dx\,dy$ اینک ○

نکته: جواب همان می شود، فرقی ندارد.



$$I = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=\sqrt{y}} 5x^3y^4 \; dx\, dy$$

$$I = \int_{y=0}^{y=1} \left(\frac{5x^4y^4}{4} \right) \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy$$

$$I = \int_{y=0}^{y=1} \frac{5y^4}{4} \left((\sqrt{y})^4 - (0)^4 \right) dy$$

$$I = \int_{y=0}^{y=1} \frac{5y^6}{4}\, dy = \left(\frac{5y^7}{28} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{5}{28} - 0 = \frac{5}{28}$$

iman

Date: / / Subject:

○ مساحت ناحیه‌ی D ○

$$\text{مساحت ناحیه‌ی } D = \iint_D 1\,dA = \iint_D 1\,dy\,dx = \iint_D 1\,dx\,dy$$

○ سوال ○ در مثال قبل مساحت ناحیه D را حساب کنید.

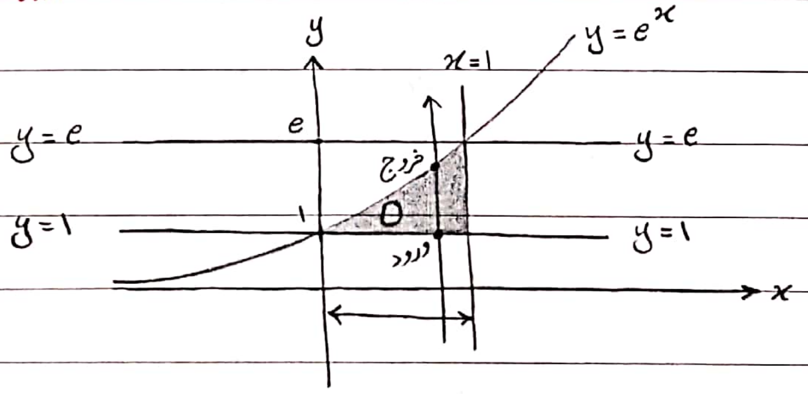
$$\text{مساحت} = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x^2}^{y=1} 1\,dy\,dx = \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=\sqrt{y}} 1\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=\sqrt{y}} 1\,dx\,dy = \int_{y=0}^{y=1} x\Big|_{x=0}^{x=\sqrt{y}}\,dy$$

$$\Rightarrow \int_{y=0}^{y=1}\sqrt{y}\,dy = \left(\frac{y^{1/2+1}}{1/2+1}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3/2} - 0 = \frac{2}{3}$$

○ مثال ○ انتگرال دوگانه‌ی زیر را محاسبه کنید که در آن D ناحیه‌ی محدود به خطوط $x=1$ و $y=1$ و منحنی $y=e^x$ در ربع اول است.

$$I = \iint_D y e^x\,dA$$



iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

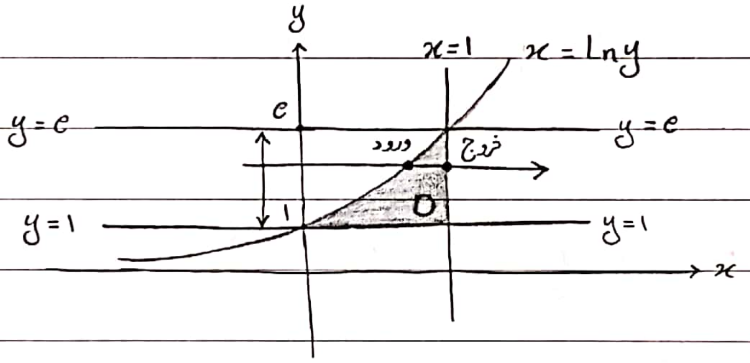
$$I=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=1}^{y=e^x} ye^x\,dy\,dx=\int_{x=0}^{x=1}\left(\frac{y^2}{2}e^x\right)\Big|_{y=1}^{y=e^x}dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=1}(e^x)^3-e^x\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{3x}}{3}-e^x\right)\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$I=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{e^3}{3}-e\right)-\left(\frac{e^0}{3}-1\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^3}{3}-e+\frac{2}{3}\right)$$

o می توانیم جای dy و dx را هم عوض کنیم ، فرقی در جواب نمی کند.

نکته مهم $\Rightarrow$ $y=e^x \longleftrightarrow x=\ln y$



$$I=\int_{y=1}^{y=e}\int_{x=\ln y}^{x=1} ye^x\,dx\,dy=\int_{y=1}^{y=e}(ye^x)\Big|_{x=\ln y}^{x=1}dy$$

$$I=\int_{y=1}^{y=e}(ye-ye^{\ln y})\,dy=\int_{y=1}^{y=e}(ye-y^2)\,dy$$

$$I=\left(\frac{y^2e}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=1}^{y=e}=\left(\frac{e^3}{2}-\frac{e^3}{3}\right)-\left(\frac{e}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

$$I=\frac{3e^3-2e^3}{6}-\frac{e}{2}+\frac{1}{3}=\frac{e^3}{6}-\frac{e}{2}+\frac{1}{3}$$

از $\frac{1}{2}$ فاکتور می گیریم $\Rightarrow I=\frac{1}{2}\left(\frac{e^3}{3}-e+\frac{2}{3}\right)$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

سوال ۵: در مثال قبل مساحت ناحیه‌ی D را حساب کنید.

$$D \text{ مساحت } : \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=1}^{y=e^x} 1\, dy\, dx = \int_{x=0}^{x=1} (y)\Big|_{y=1}^{y=e^x} dx$$

$$\Rightarrow \int_{x=0}^{x=1} (e^x-1)\, dx = (e^x - x)\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$\Rightarrow (e-1)-(1-0) = \boxed{e-2}$$

نکته مهم: اگر ناحیه‌ی انتگرال گیری مستطیل باشد و تابع زیر انتگرال بصورت حاصل ضرب دو تابع جداگانه برحسب x و y باشد، آنگاه می‌توان انتگرال‌ها را روی توابع پخش کرد. یعنی:

$$\int_a^b\int_c^d f(x)\,g(y)\,dy\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \int_c^d g(y)\,dy$$

iman NOTEBOOK

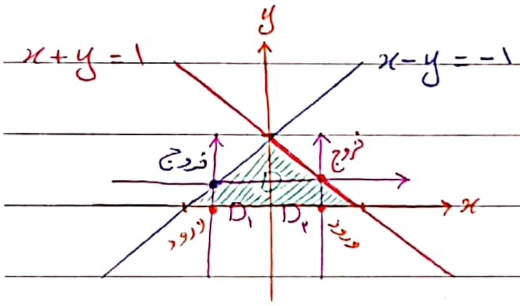
Scanned by CamScanner

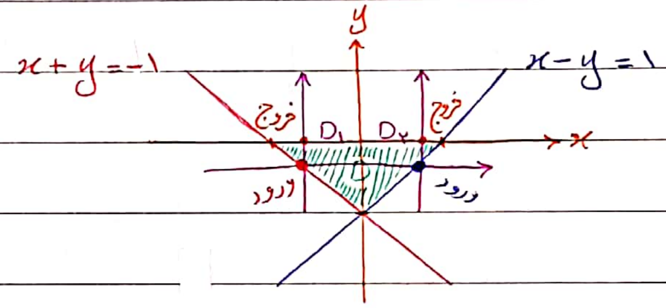
Date: / / Subject:

ناحیه‌ی منظم و نامنظم

○ ناحیه‌ی D را نسبت به محور y ها منظم می‌گویند هرگاه، تمام خطوطی که در این ناحیه موازی محور y ها رسم می‌شوند، ورودی یکسان و خروجی یکسان داشته باشند.

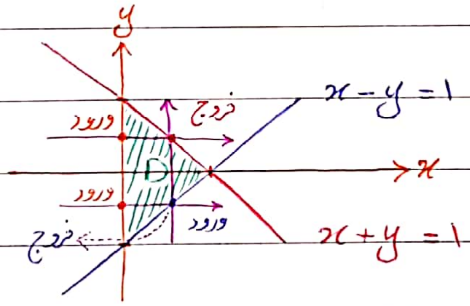
○ اگر دو تا خط پیدا بشوند به طوری که ورودی یکسان نداشته باشند یا خروجی یکسان نداشته باشند، آنگاه ناحیه نسبت به محور y ها نامنظم است.

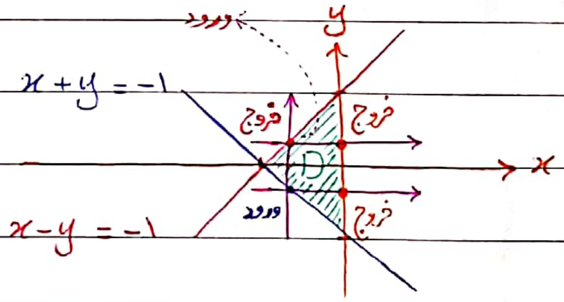




○ ناحیه‌ی D نسبت به محور y نامنظم و نسبت به محور x منظم است.

$$\iint_D f\,dA = \iint_{D_1} f\,dy\,dx + \iint_{D_2} f\,dy\,dx = \iint_D f\,dx\,dy$$





○ ناحیه‌ی D نسبت به محور x نامنظم و نسبت به محور y منظم است.

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

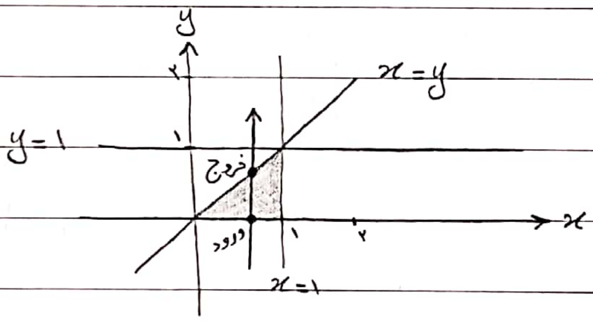
تعویض ترتیب انتگرال گیری

o هرگاه محاسبه ی انتگرال داخلی سخت یا غیرممکن باشد، آنگاه ترتیب انتگرال گیری را عوض می کنیم.

o ابتدا از روی انتگرال ناحیه ی انتگرال گیری را رسم می کنیم سپس ترتیب انتگرال گیری را عوض می کنیم.

o مثال o انتگرال های زیر را حل کنید.

$$\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy = \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=1} e^{x^2}\,dx\,dy$$



$$\Rightarrow \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x} e^{x^2}\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1} \left(y e^{x^2}\right)\Big|_{y=0}^{y=x} dx$$

$$\Rightarrow \int_{x=0}^{x=1} x e^{x^2}\,dx$$

$$(e^{x^2})' = 2x e^{x^2} \longleftrightarrow \int 2x e^{x^2} = e^{x^2}$$ حال مشتق e^{x^2} را ایجاد می کنیم ⇐

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=1} 2x e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2} e^{x^2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}(e-1)$$

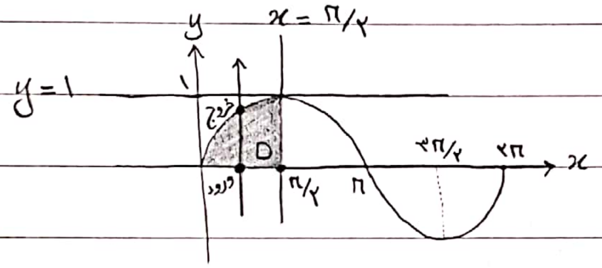
NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

$$\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \frac{x}{\sin x}\, dx\, dy$$

$$\Rightarrow \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=\arcsin y}^{x=\pi/2} \frac{x}{\sin x}\, dx\, dy \quad , \quad x=\arcsin y \longleftrightarrow y=\sin x$$



$$\int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \int_{y=0}^{y=\sin x} \frac{x}{\sin x}\, dx\, dy$$

$$\Rightarrow \int_{x=0}^{x=\pi/2} \frac{x}{\sin x}\, y \Big|_{y=0}^{y=\sin x} dy$$

$$\Rightarrow \int_{x=0}^{x=\pi/2} x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{\pi^2}{8}$$

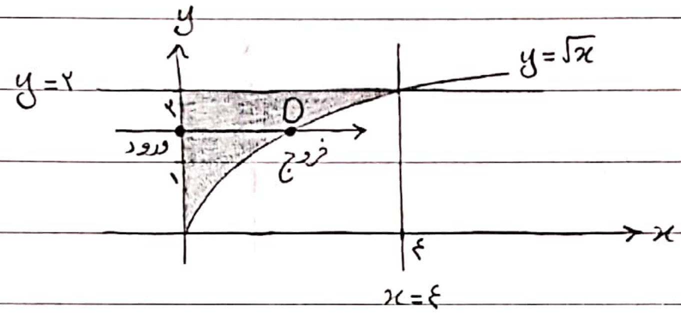
NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / /   Subject:

$$\int_{۰}^{۴}\int_{\sqrt{x}}^{۲} \sin\left(\frac{\pi}{۸}y^{۳}\right) dy\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{x=۰}^{x=۴}\int_{y=\sqrt{x}}^{y=۲} \sin\left(\frac{\pi}{۸}y^{۳}\right) dy\,dx$$



$$\Rightarrow \int_{y=۰}^{y=۲}\int_{x=۰}^{x=y^{۲}} \sin\left(\frac{\pi}{۸}y^{۳}\right) dx\,dy$$

$$\Rightarrow \int_{y=۰}^{y=۲} x\sin\left(\frac{\pi}{۸}y^{۳}\right)\Big|_{x=۰}^{x=y^{۲}} dy \Rightarrow \int_{y=۰}^{y=۲} y^{۲}\sin\left(\frac{\pi}{۸}y^{۳}\right) dy$$

$$\Rightarrow \frac{-۸}{۳\pi}\int_{y=۰}^{y=۲} \underbrace{\frac{-۳\pi}{۸}y^{۲}}_{-u'}\ \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{۸}y^{۳}\right)}_{\sin(u)} dy = \left(\frac{-۸}{۳\pi}\right)\cos\left(\frac{\pi y^{۳}}{۸}\right)\Big|_{y=۰}^{y=۲}$$

$$\Rightarrow \frac{-۸}{۳\pi}\left(\underbrace{\cos(\pi)}_{-۱} - \underbrace{\cos(۰)}_{۱}\right) = \frac{۱۶}{۳\pi}$$

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

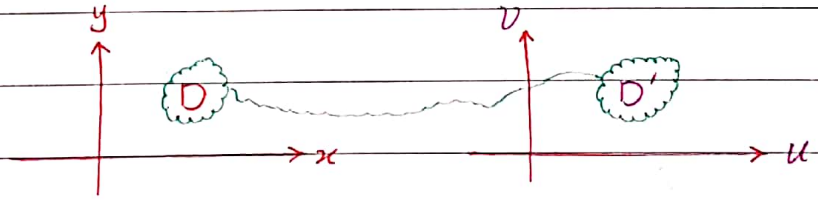
تغییر متغیر در انتگرال دوگانه

- هرگاه با تعویض ترتیب انتگرال گیری انتگرال قابل حل نباشد آنگاه از تغییر متغیر استفاده می کنیم.
- با استفاده از تجربه و تمرین از روی تابع زیر انتگرال یا از روی مرزهای ناحیه ی انتگرال گیری تابعی برحسب x,y را u فرض می کنیم و تابعی دیگر برحسب x,y را v فرض می کنیم. سپس در صورت امکان x,y را برحسب v و u بدست می آوریم.

$$\begin{cases} u = h(x,y) \\ v = g(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = f_1(u,v) \\ y = f_2(u,v) \end{cases}$$

ژاکوبین $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \dfrac{\partial x}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial u}$

$$dA = dy\,dx = |J|\,du\,dv$$



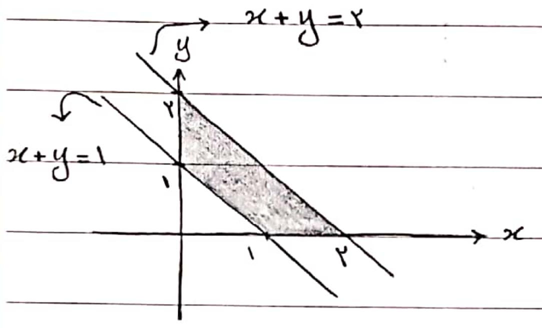
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D'} f(f_1(u,v), f_2(u,v))\,|J|\,du\,dv$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

مثال ۵ مهم ⇐ انتگرال $\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dA$ را محاسبه کنید که در آن D یک ذوزنقه با رئوس $(1,0)$ و $(0,1)$ و $(2,0)$ و $(0,2)$ است.

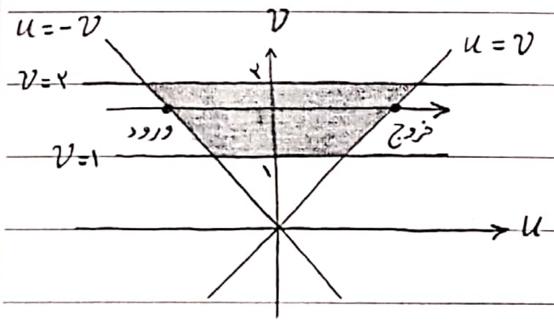


$$\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \\ y = \frac{v-u}{2} = \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}u \end{cases}$$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

مرزها

$$\begin{cases} y=0 \Rightarrow \frac{v-u}{2} = 0 \rightarrow \boxed{u=v} \\ x=0 \Rightarrow \frac{u+v}{2} = 0 \rightarrow \boxed{u=-v} \\ x+y=1 \Rightarrow \boxed{v=1} \\ x+y=2 \Rightarrow \boxed{v=2} \end{cases}$$



ناحیه نسبت به محور u منظم
و نسبت به محور v نامنظم است

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

$$dA = dy\,dx = |J|\,du\,dv = \left|\frac{۱}{۲}\right| du\,dv = \frac{۱}{۲}\,du\,dv$$

$$\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dA = \int_{v=۱}^{v=۲} \int_{u=-v}^{u=v} \cos\left(\frac{u}{v}\right) \frac{۱}{۲}\,du\,dv$$

$$\dots = \frac{۱}{۲} \int_{v=۱}^{v=۲} \left(v \sin\left(\frac{u}{v}\right) \Big|_{u=-v}^{u=v} \right) dv$$

$$\dots = \frac{۱}{۲} \int_{v=۱}^{v=۲} v \left(\underbrace{\sin\left(\frac{v}{v}\right)}_{\sin(۱)} - \underbrace{\sin\left(\frac{-v}{v}\right)}_{\sin(-۱)} \right) dv$$

$$\dots = \frac{۲ \sin(۱)}{۲} \int_{v=۱}^{v=۲} v\,dv = \frac{۳}{۲} \sin(۱)$$

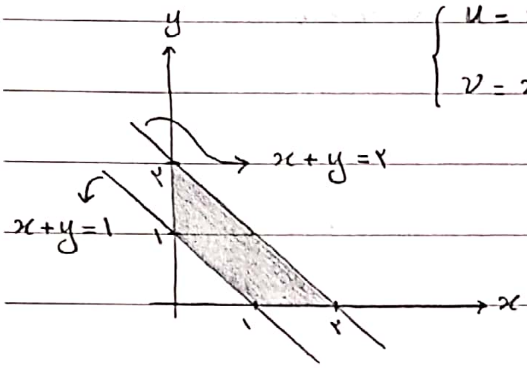
NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

تمرین ۵ انتگرال $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dA$ را حساب کنید که در آن D یک ذوزنقه با رئوس (۱،۰) و (۰،۱) و (۲،۰) و (۰،۲) می باشد.

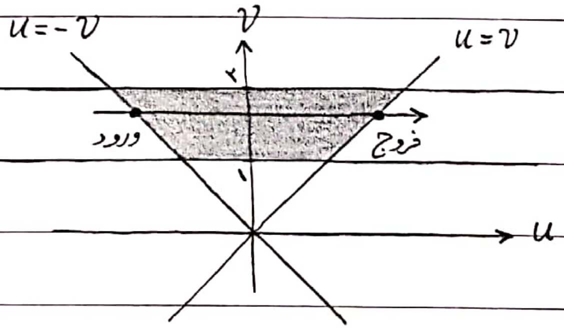
$$\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{۲} = \dfrac{۱}{۲}u + \dfrac{۱}{۲}v \\ y = \dfrac{v-u}{۲} = \dfrac{۱}{۲}v - \dfrac{۱}{۲}u \end{cases}$$



$$|J| = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{-۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{vmatrix} = \frac{۱}{۴} - \left(-\frac{۱}{۴}\right) = \frac{۱}{۲}$$

مرزها

$$\begin{cases} x = ۰ \rightarrow \dfrac{u+v}{۲} = ۰ \rightarrow \boxed{u = -v} \\ y = ۰ \rightarrow \dfrac{v-u}{۲} = ۰ \rightarrow \boxed{u = v} \\ x+y = ۱ \rightarrow \boxed{v = ۱} \\ x+y = ۲ \rightarrow \boxed{v = ۲} \end{cases}$$



ناحیه نسبت به محور u ها منظم و نسبت به محور v ها نامنظم است

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

$$dA = dy\,dx = |J|\,du\,dv = \left|\frac{1}{2}\right| du\,dv = \frac{1}{2}\,du\,dv$$

$$\int_D\int e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dA = \int_{v=1}^{v=2}\int_{u=-v}^{u=v} e^{u/v}\,\frac{1}{2}\,du\,dv$$

نکته $\Rightarrow \int e^{Ax}\,dx = \frac{1}{A}e^{Ax} \rightarrow$ در این مسئله: $A = 1/v$

$$= \frac{1}{2}\int_{v=1}^{v=2} v e^{u/v}\Big|_{u=-v}^{u=v}\,dv = \frac{1}{2}\int_{v=1}^{v=2} v\left(e-\frac{1}{e}\right)dv$$

$$= \frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\int_{v=1}^{v=2} v\,dv = \frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\left(\frac{v^2}{2}\right)\Big|_{v=1}^{v=2} = \frac{3}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

○ سوال زیر را می‌توان به دو صورت طرح کرد ○

○ انتگرال $\int_D\int e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dA$ را محاسبه کنید که در آن D یک مثلث با رئوس $(0,0),(0,1),(1,0)$ است. برای حل ابتدا مثلث را رسم می‌کنیم

○ انتگرال روبه‌رو را حساب کنید. $\int_0^1\int_0^{1-x} e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dy\,dx$

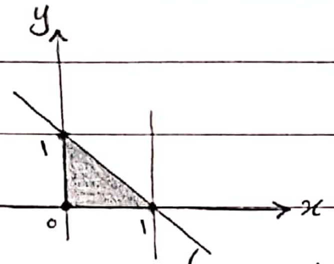
برای حل ابتدا انتگرال را به صورت روبه‌رو نوشته و سپس مثلث را رسم کرده و حل می‌کنیم

$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1-x} e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dy\,dx$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

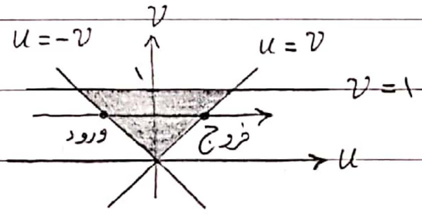


$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \\ y = \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}u \end{cases}$$

$\hookrightarrow y = 1 - x \Rightarrow x + y = 1$

$$|J| = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

مرزها
$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow \frac{u+v}{2} = 0 \rightarrow \boxed{u = -v} \\ y = 0 \rightarrow \frac{v-u}{2} = 0 \rightarrow \boxed{u = v} \\ x + y = 1 \rightarrow \boxed{v = 1} \end{cases}$$



ناحیه نسبت به محور u ها منظم

و نسبت به محور v ها نامنظم است

$$\int_{v=0}^{v=1}\int_{u=-v}^{u=v} e^{u/v}\,\frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_{v=0}^{v=1} v e^{u/v}\Big|_{u=-v}^{u=v} dv$$

$$= \frac{(e - 1/e)}{2}\left(\frac{v^2}{2}\right)\Big|_{v=0}^{v=1} = \frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

iman NOTEBOOK

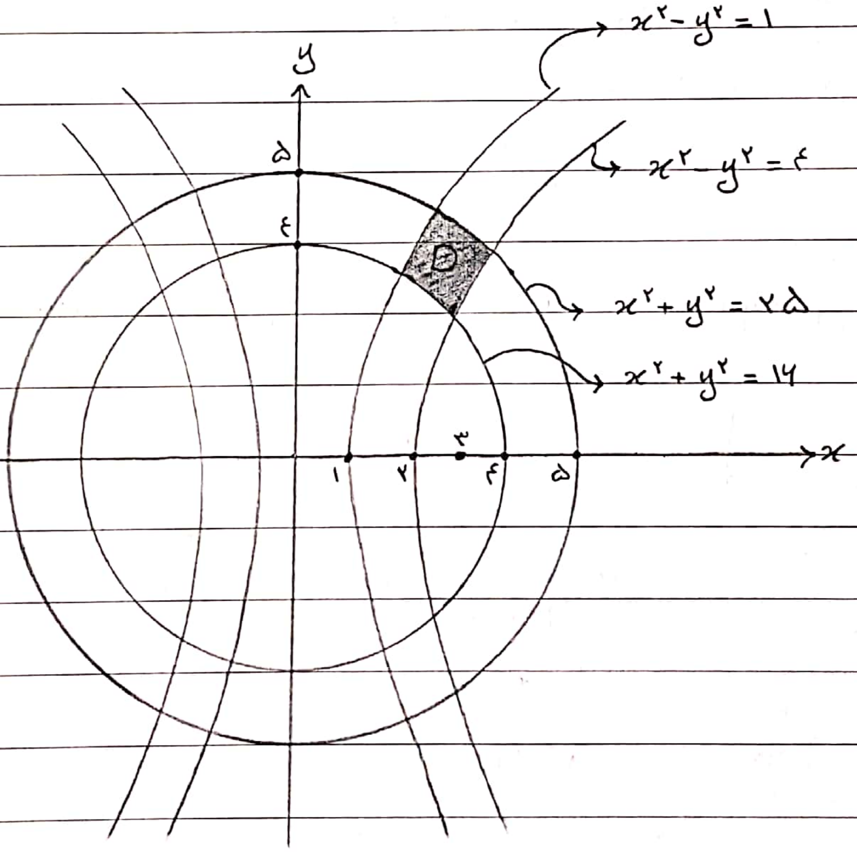
Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

نکته مهم: اگر محاسبه‌ی x, y برحسب u, v سخت و یا غیرممکن باشد، آنگاه از روش زیر ژاکوبین را محاسبه می‌کنیم.

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

مثال: انتگرال $\iint_D xy(x^2 - y^2)\, dA$ را محاسبه کنید که در آن D ناحیه‌ی محدود به منحنی‌های $x^2 - y^2 = 1$ و $x^2 - y^2 = 4$ و $x^2 + y^2 = 16$ و $x^2 + y^2 = 25$ در ربع اول می‌باشد.



iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /　　　　　　　　Subject:

$$\left.\begin{aligned} u &= x^۲ - y^۲ \\ v &= x^۲ + y^۲ \end{aligned}\right\} \Rightarrow J = \frac{۱}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{۱}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = \frac{۱}{\begin{vmatrix} ۲x & -۲y \\ ۲x & ۲y \end{vmatrix}}$$

$$\ldots = \frac{۱}{۴xy - (-۴xy)} = \frac{۱}{۸xy}$$

$$dA = |J|\, du\, dv = \left|\frac{۱}{۸xy}\right| du\, dv = \frac{۱}{۸xy}\, du\, dv$$

مرزها

$$\begin{cases} x^۲ - y^۲ = ۱ \rightarrow u = ۱ \\ x^۲ - y^۲ = ۴ \rightarrow u = ۴ \\ x^۲ + y^۲ = ۱۶ \rightarrow v = ۱۶ \\ x^۲ + y^۲ = ۲۵ \rightarrow v = ۲۵ \end{cases}$$

$$I = \iint_D xy(x^۲ - y^۲)(x^۲ + y^۲)\, dA$$

$$I = \int_{v=۱۶}^{v=۲۵} \int_{u=۱}^{u=۴} xy\, uv\, \frac{۱}{۸xy}\, du\, dv$$

$$I = \frac{۱}{۸} \int_{v=۱۶}^{v=۲۵} v\left(\frac{u^۲}{۲}\right)\Bigg|_{u=۱}^{u=۴} dv$$

$$I = \frac{۱}{۸} \times \frac{۱۵}{۲} \times \left(\frac{v^۲}{۲}\right)\Bigg|_{v=۱۶}^{v=۲۵}$$

$$I = \frac{۱۵}{۱۶} \times \left(\frac{۶۲۵}{۲} - \frac{۲۵۶}{۲}\right) = \frac{۱۵}{۱۶} \times \frac{۳۶۹}{۲} = \frac{۵۵۳۵}{۳۲}$$

$$I = ۱۷۲,۹۶۸۷۵$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

مثال ۵ انتگرال $\iint_D \left(\sqrt{ye^{x}} + \sqrt{ye^{-x}}\right) dA$ را محاسبه کنید که در آن D ناحیه محدود به منحنی های $y=e^{x}$ ، $y=2e^{x}$ ، $y=e^{-x}$ ، $y=4e^{-x}$ است.

$$\left.\begin{aligned} u &= ye^{x} \\ v &= ye^{-x} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{ضرب}} y^2 = uv \longrightarrow y = \pm\sqrt{uv}$$

مرزها

$$\begin{cases} y=e^{x} \longrightarrow y/e^{x}=1 \longrightarrow ye^{-x}=1 \longrightarrow v=1 \\ y=2e^{x} \longrightarrow y/e^{x}=2 \longrightarrow ye^{-x}=2 \longrightarrow v=2 \\ y=e^{-x} \longrightarrow y/e^{-x}=1 \longrightarrow ye^{x}=1 \longrightarrow u=1 \\ y=4e^{-x} \longrightarrow y/e^{-x}=4 \longrightarrow ye^{x}=4 \longrightarrow u=4 \end{cases}$$

مستطیل

$$J = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} ye^{x} & e^{x} \\ -ye^{-x} & e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{1}{y-(-y)} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{\pm 2\sqrt{uv}}$$

$$dA = |J|\,du\,dv = \left|\frac{1}{\pm 2\sqrt{uv}}\right| du\,dv = \frac{1}{2\sqrt{uv}}\,du\,dv$$

$$I = \int_{v=1}^{v=2}\int_{u=1}^{u=4} \left(\sqrt{u}+\sqrt{v}\right) \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{uv}}}_{2\sqrt{u}\sqrt{v}}\, du\,dv$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{v=1}^{v=2}\int_{u=1}^{u=4} \left(\frac{1}{\sqrt{v}} + \frac{1}{\sqrt{u}}\right) du\,dv$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{v=1}^{v=2}\int_{u=1}^{u=4} \left(v^{-1/2} + u^{-1/2}\right) du\,dv$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

$$I = \frac{١}{٢}\int_{v=١}^{v=٢} v^{-١/٢} + \left(\frac{u^{-١/٢+١}}{-١/٢+١}\right)\Big|_{u=١}^{u=٤} \, dv$$

$$I = \frac{١}{٢}\int_{v=١}^{v=٢} v^{-١/٢} + \left(٢\sqrt{٤} - ٢\sqrt{١}\right) \, dv$$

$$I = \frac{١}{٢}\left(\left(\frac{v^{-١/٢+١}}{-١/٢+١}\right)\Big|_{v=١}^{v=٢} + ٢ \right)$$

$$I = \frac{١}{٢}\left(\left(٢\sqrt{٢} - ٢\sqrt{١}\right) + ٢ \right)$$

$$I = \sqrt{٢}$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

○ سوال امتحانی ○ انتگرال $\iint_D \left(\sqrt{yx} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right) dA$ را محاسبه کنید که در آن D ناحیه‌ی محدود به منحنی‌های زیر در ربع اول است.

$$\left.\begin{array}{l} xy = 1 \\ xy = 2 \\ y = 3x \\ y = 4x \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} u = 1 \\ u = 2 \\ v = 3 \\ v = 4 \end{array}\right\}$$ مستطیل

$u = yx \quad , \quad v = \frac{y}{x}$

$$J = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ -y/x^2 & 1/x \end{vmatrix}} = \frac{1}{\frac{y}{x} - (-\frac{y}{x})} = \frac{1}{\frac{2y}{x}} = \frac{1}{2v}$$

$$dA = |J|\, du\, dv = \frac{1}{2v}\, du\, dv$$

$$I = \int_{v=3}^{v=4} \int_{u=1}^{u=2} (\sqrt{u} + \sqrt{v}) \frac{1}{2v}\, du\, dv$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{v=3}^{v=4} \int_{u=1}^{u=2} \left(\frac{1}{v}\sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{v}}\right) du\, dv$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{v=3}^{v=4} \frac{1}{v}(\sqrt{2} - 1) + \frac{1}{\sqrt{v}}\, dv$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{v=3}^{v=4} \frac{\sqrt{2}}{v} - \frac{1}{v} + \frac{1}{\sqrt{v}}$$

$$I = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\int_{v=3}^{v=4} \frac{1}{v} - \int_{v=3}^{v=4} \frac{1}{v} + \int_{v=3}^{v=4} \frac{1}{\sqrt{v}}\right)$$

$$I = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}(\ln 4 - \ln 3) - \ln 4 + \ln 3 + 4 - 2\sqrt{3}\right)$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /

Subject:

تمرین ۵ انتگرال $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dA$ را محاسبه کنید که در آن D ناحیه محدود به منحنی های زیر در ربع اول است.

$$\left.\begin{aligned} xy &= 1 \\ xy &= 2 \\ xy^3 &= 3 \\ xy^3 &= 4 \end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} u &= 1 \\ u &= 2 \\ v &= 3 \\ v &= 4 \end{aligned}\right.$$

$$u = xy$$
$$v = xy^3$$

$$J = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ y^3 & 3xy^2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{3xy^3 - xy^3} = \frac{1}{2xy^3} = \frac{1}{2v}$$

$$dA = |J|\, du\,dv = \frac{1}{2v} du\,dv$$

$$\frac{u}{v} = \frac{xy}{xy^3} = \frac{1}{y^2} \Rightarrow y^2 = \frac{v}{u} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{v}{u}}$$

$$uv = x^2y^4 \Rightarrow x^2 = \frac{uv}{y^4}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{uv/y^4}{v/u} = \frac{u^2}{y^4} = \frac{u^2}{v^2/u^2} = \frac{u^4}{v^2}$$

$$I = \int_{v=3}^{v=4} \int_{u=1}^{u=2} \frac{u^4}{v^2} \frac{1}{2v} du\,dv$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{v=3}^{v=4} \int_{u=1}^{u=2} \frac{u^4}{v^3} du\,dv$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

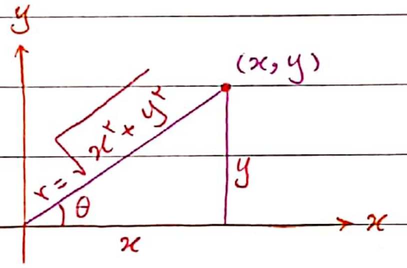
Date: / / Subject:

$$I = \frac{1}{2}\int_{v=3}^{v=4} \frac{1}{v^3}\left(\frac{2^5}{5} - \frac{1^5}{5}\right) dv$$

$$I = \frac{31}{10}\int_{v=3}^{v=4} v^3\, dv = \frac{31}{10}\left(\frac{4^4}{4} - \frac{3^4}{4}\right)$$

تغییر متغیر قطبی

○ اگر ناحیه‌ی انتگرال گیری، دایره یا قسمتی از یک دایره باشد، یا در تابع زیر انتگرال x^2+y^2 داشته باشیم، آنگاه از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.



1) $r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$ فاصله تا مرکز

2) $\tan\theta = y/x \Rightarrow \theta = \arctan(y/x)$ زاویه با قسمت مثبت محور xها

3) $\sin\theta = y/r \Rightarrow y = r\sin\theta$

4) $\cos\theta = x/r \Rightarrow x = r\cos\theta$

$0 \le \theta \le 2\pi$ یا $-\pi \le \theta \le \pi$

$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ $\xrightarrow{\text{بعد از محاسبه}}$ r $\xrightarrow{\text{پس}}$ $dA = dy\,dx = r\,dr\,d\theta$

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

iman NOTEBOOK

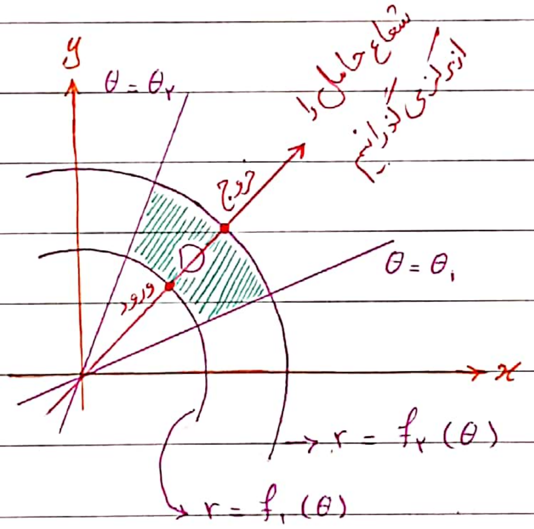
Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

نکته: شکل قطبی یک تابع در مختصات دکارتی به صورت $r = f(\theta)$ خواهد بود.

مثال: معادله خط $x + 2y = 1 \Rightarrow r\cos\theta + 2r\sin\theta = 1 \Rightarrow r = \dfrac{1}{\cos\theta + 2\sin\theta}$

تعیین حدود انتگرال دوگانه در مختصات قطبی



$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} \int_{r=f_1(\theta)}^{r=f_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

بیشترین مقدار θ — خروج

کمترین مقدار θ — ورود

Date: / /

Subject:

ه برای تعیین حدود انتگرال دوگانه در مختصات قطبی مانند زیر عمل می کنیم:

- ابتدا می نویسیم $dA = r dr d\theta$

- مرزهای ناحیه‌ی انتگرال گیری را به صورت قطبی تبدیل می کنیم و همچنین تابع زیر انتگرال را برحسب r و θ می نویسیم.

- شعاع حاملی را از مرکز به ناحیه‌ی مورد نظر وارد می کنیم. منحنی های ورودی و خروجی را به صورت $r = f_1(\theta)$ و $r = f_2(\theta)$ تعیین می کنیم و در نهایت کمترین و بیشترین مقدار θ در ناحیه‌ی مورد نظر را بدست می آوریم.

ه نکته ه اگر دو شعاع حامل ورودی یکسان یا خروجی یکسان نداشته باشند، آنگاه ناحیه در مختصات قطبی نامنظم است.

ه نکات مهم ه

۱) $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow r^2 = a^2 \Rightarrow r = a$ «دایره با مرکز مبدأ و شعاع a»

۲) $y = x \Rightarrow y/x = 1 \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \pi/4$

۳) $y = -x \Rightarrow y/x = -1 \Rightarrow \tan\theta = -1 \Rightarrow \theta = -\pi/4$

۴) $y = \pm\sqrt{3}\, x \Rightarrow y/x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \tan\theta = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \pm\pi/3$

۵) $y = \pm 1/\sqrt{3}\, x \Rightarrow y/x = \pm 1/\sqrt{3} \Rightarrow \tan\theta = \pm 1/\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \pm\pi/6$

۶) $x = 0$ محور y ها $\Rightarrow \theta = \pi/2$

۷) $y = 0$ محور x ها $\Rightarrow \theta = 0$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

دایره با مرکز (α, β) و شعاع R $\qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$

دایره با مرکز $(a, 0)$ و شعاع a $\qquad (x-a)^2 + (y-0)^2 = a^2$

$\Rightarrow \quad x^2 + a^2 - 2ax + y^2 = a^2$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2ax$

$\Rightarrow \quad r^2 = 2ar\cos\theta \quad \Rightarrow \quad r = 2a\cos\theta$

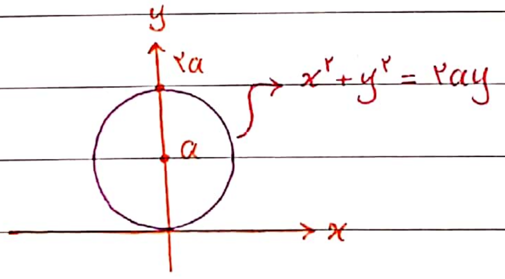
دایره با مرکز $(0, a)$ و شعاع a $\qquad (x-0)^2 + (y-a)^2 = a^2$

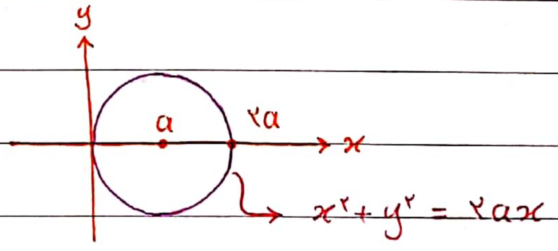
$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + a^2 - 2ay = a^2$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2ay$

$\Rightarrow \quad r^2 = 2ar\sin\theta \quad \Rightarrow \quad r = 2a\sin\theta$

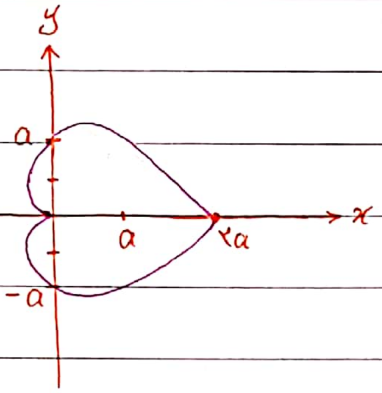
$$x^2 + y^2 = \begin{cases} a^2 & \text{مرکز } (0,0) \\ 2ax & \text{مرکز } (a,0) \\ 2ay & \text{مرکز } (0,a) \end{cases} \quad \text{شعاع } a$$

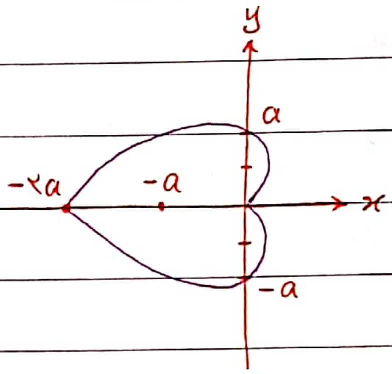




Date: / / Subject:

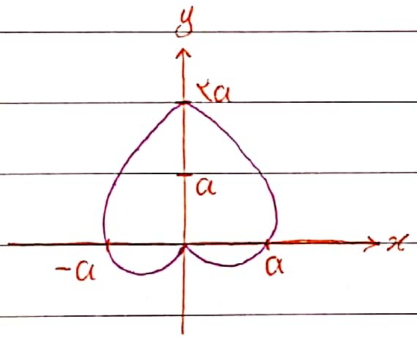
توابع دلنما یا دلوار

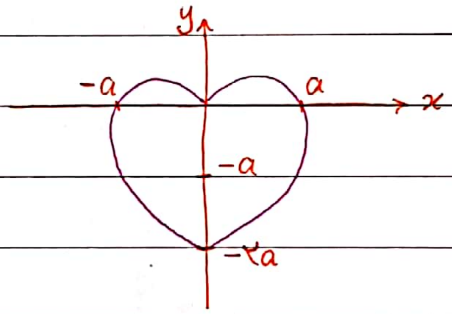




$r = a(1 + \cos\theta)$

$r = a(1 - \cos\theta)$





$r = a(1 + \sin\theta)$

$r = a(1 - \sin\theta)$

مساحت ناحیه D

$$\int_D \int 1 \, dA = \int_D \int r \, dr \, d\theta$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /

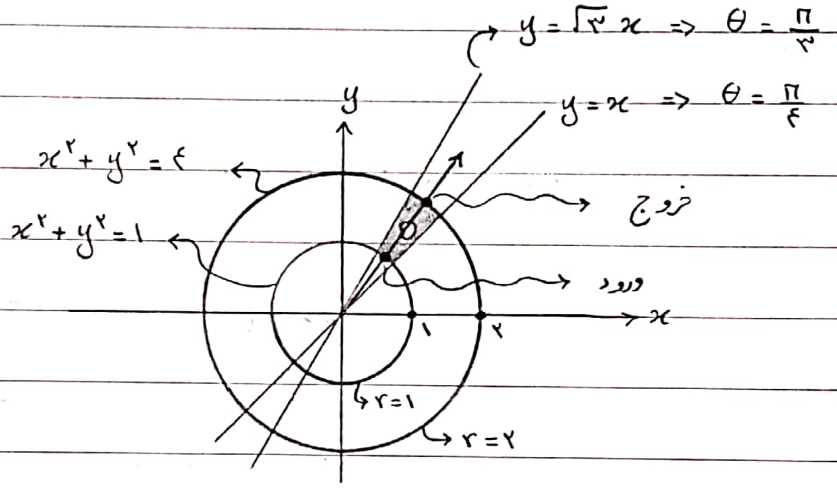
Subject:

مثال ۵ انتگرال $\iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} dA$ را محاسبه کنید که در آن D ناحیه‌ی محدود

به منحنی های $y=x$ ، $y=x\sqrt{3}$ ، $y=\sqrt{1-x^2}$ ، $y=\sqrt{4-x^2}$ است.

$y=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2 = 1-x^2 \Rightarrow x^2+y^2=1$

$y=\sqrt{4-x^2} \Rightarrow y^2 = 4-x^2 \Rightarrow x^2+y^2=4$



$$\iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} dA = \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{3}} \int_{r=1}^{r=2} \frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)}{r} \, r\,dr\,d\theta$$

$$I = \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/3} (\sin\theta \cos\theta)\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_{r=1}^{r=2} d\theta = \frac{7}{3}\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{3}} \underbrace{\sin\theta}_{u}\, \underbrace{\cos\theta\, d\theta}_{u'}$$

$$I = \frac{7}{3}\left(\frac{\sin^2\theta}{2}\right)\Big|_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/3} = \frac{7}{6}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = \frac{7}{24}$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /   Subject:

○ سوال زیر را به دو صورت می توان سوال داد ○

○ انتگرال زیر را حل کنید ○

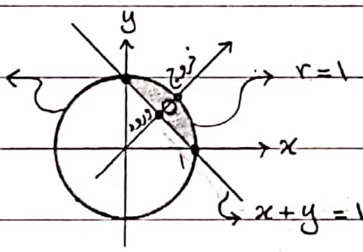
$$\int_D\int \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dA$$

$$D=\{(x,y) \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\geq 1,\ x^2+y^2\leq 1\}$$

○ انتگرال روبه رو را حل کنید ○

$$\int_0^1\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dy\,dx$$

$x^2+y^2=1$



$r=1$

$x+y=1 \Rightarrow r\cos\theta + r\sin\theta = 1$

$$r=\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$$

$$I=\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}\int_{r=\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{r=1} \frac{r\cos\theta+r\sin\theta}{r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$I=\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} (\cos\theta+\sin\theta)(r)\Big|_{r=1/\sin\theta+\cos\theta}^{r=1}\,d\theta$$

$$I=\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} (\cos\theta+\sin\theta)\left(1-\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\right)d\theta$$

$$I=\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} (\cos\theta+\sin\theta-1)\,d\theta = (\sin\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I=(1-0)-(0-1)-\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = 2-\frac{\pi}{2}$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

مثال: انتگرال روبه‌رو را محاسبه کنید.

$$\int_1^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} y\sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx$$

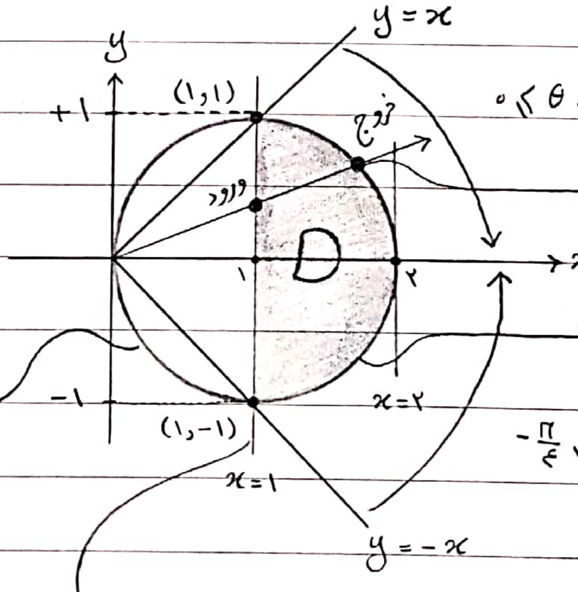
$\Rightarrow y = -\sqrt{2x-x^2} \Rightarrow y^2 = 2x - x^2 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2 = 2x}$ ①

$\Rightarrow (x-a)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 + a^2 - 2ax + y^2 = a^2$

$\boxed{x^2+y^2 = 2ax}$ ②

①, ② $\Rightarrow a = 1 \Rightarrow$ دایره با مرکز $(1, 0)$ و شعاع «1»

$$= \int_{x=1}^{x=2} \int_{y=-\sqrt{2x-x^2}}^{y=\sqrt{2x-x^2}} y\sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx$$



$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

$\rightarrow y = \sqrt{2x - x^2}$

$\rightarrow y = -\sqrt{2x - x^2}$

$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq 0$

$x^2+y^2 = 2x$ خروج

$r = 2\cos\theta$

ورود $x = 1$

$r\cos\theta = 1 \longrightarrow r = \frac{1}{\cos\theta}$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

$$= \int_{\theta=-\pi/۴}^{\theta=\pi/۴} \int_{r=\frac{۱}{\cos\theta}}^{r=۲\cos\theta} r\sin\theta \cdot r \cdot r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_{\theta=-\pi/۴}^{\theta=\pi/۴} \sin\theta \left(\frac{r^۴}{۴}\right)\Bigg|_{r=۱/\cos\theta}^{r=۲\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_{\theta=-\pi/۴}^{\theta=\pi/۴} \frac{۱}{۴}\sin\theta \left(۱۶\cos^۴\theta - \cos^{-۴}\theta\right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=-\pi/۴}^{\theta=\pi/۴} ۴\sin\theta\cos^۴\theta - \frac{۱}{۴}\sin\theta\cos^{-۴}\theta \, d\theta$$

$$= -۴\int_{-\pi/۴}^{\pi/۴} \underbrace{-\sin\theta}_{u'} \underbrace{\cos^۴\theta}_{u^۴} d\theta + \frac{۱}{۴}\int_{-\pi/۴}^{\pi/۴} \underbrace{-\sin\theta}_{u'} \underbrace{\cos^{-۴}\theta}_{u^{-۴}}$$

$$= -۴\left(\frac{\cos^۵\theta}{۵}\right)\Bigg|_{-\pi/۴}^{\pi/۴} + \frac{۱}{۴}\left(\frac{\cos^{-۳}\theta}{-۳}\right)\Bigg|_{-\pi/۴}^{\pi/۴}$$

$$= \frac{-۴}{۵}\Bigg(\underbrace{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۵ - \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۵}_{۰}\Bigg) + \frac{-۱}{۱۲}\Bigg(\underbrace{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^{-۳} - \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^{-۳}}_{۰}\Bigg) = ۰$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

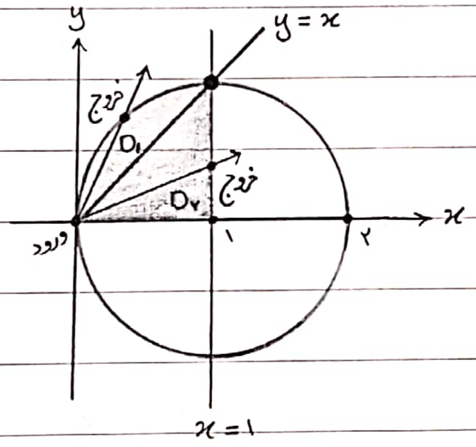
Date: / / Subject:

○ تمرین ○ انتگرال زیر را حل کنید.

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} y\sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx$$

$$\Rightarrow \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=\sqrt{2x-x^2}} y\sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx$$

○ نکته ○ $\Rightarrow y=\sqrt{2x-x^2} \longrightarrow x^2+y^2=2x$ دایره با مرکز (۱،۰) و شعاع «۱»



$$I = \overbrace{\iint_{D_1}}^{I_1} + \overbrace{\iint_{D_2}}^{I_2}$$

$$I_1 = \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} \int_{r=0}^{r=2\cos\theta} r\sin\theta \cdot r \cdot r\, dr\, d\theta$$

$$I_1 = \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} \frac{(16\cos^4\theta)}{4} \sin\theta\, d\theta$$

$$I_1 = -4 \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} \underbrace{-\sin\theta}_{u'} \underbrace{\cos^4\theta}_{u^4}\, d\theta$$

$$I_1 = \frac{-4}{5}\left(\cos^5\theta\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{-4}{5}\left(0^5 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5\right) = \frac{4}{5} \times \frac{4\sqrt{2}}{32}$$

$$I_1 = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

Date: / / Subject:

$$I_{۲} = \int_{\theta=۰}^{\theta=\pi/۴} \int_{r=۰}^{r=۱/\cos\theta} r \sin\theta \,.\, r \,.\, r \, dr \, d\theta$$

$$I_{۲} = \int_{\theta=۰}^{\theta=\pi/۴} \left(\frac{\cos^{-۴}\theta}{۴} \right) \sin\theta \, d\theta$$

$$I_{۲} = \frac{-۱}{۴} \int_{\theta=۰}^{\theta=\pi/۴} \underbrace{-\sin\theta}_{u'} \, \underbrace{\cos^{-۴}\theta}_{u^{-۴}} \, d\theta$$

$$I_{۲} = \frac{-۱}{۴} \left(\frac{\cos^{-۳}\theta}{-۳} \right) \Big|_{۰}^{\pi/۴} = \frac{۱}{۱۲} \left(\frac{۱}{\cos^{۳}\frac{\pi}{۴}} - \frac{۱}{\cos^{۳} ۰} \right)$$

$$I_{۲} = \frac{۱}{۱۲} \left(\frac{۱}{(\sqrt{۲}/۲)^{۳}} - ۱ \right) = \frac{۱}{۱۲} \left(\frac{۸}{۲\sqrt{۲}} - ۱ \right)$$

$$I_{۲} = \frac{۱}{۱۲} \left(\frac{۴}{\sqrt{۲}} - ۱ \right) = \frac{۱}{۱۲} \left(۲\sqrt{۲} - ۱ \right)$$

$$I = I_{۱} + I_{۲}$$

$$I = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۱۰} \right) + \frac{۱}{۱۲} \left(۲\sqrt{۲} - ۱ \right)$$

NOTEBOOK iman

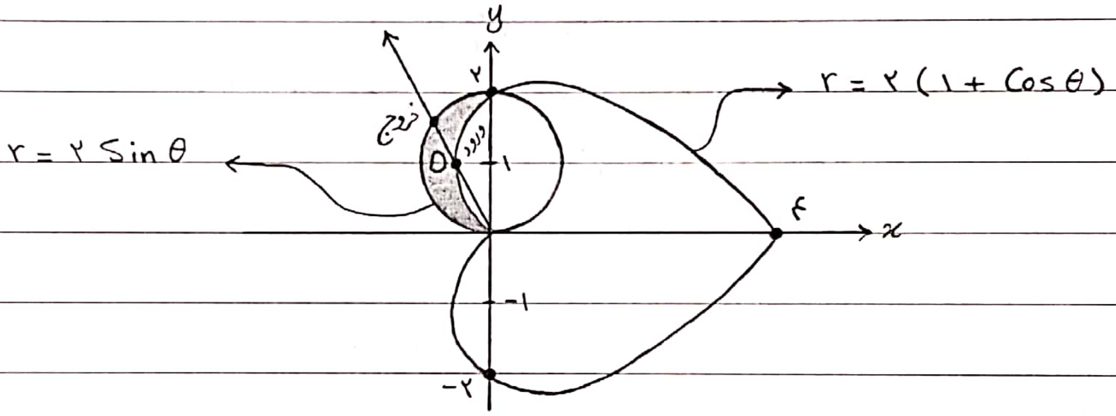
Scanned by CamScanner

Date: / /　　　　　　Subject:

تمرین ۵) مساحت ناحیه‌ی محدود به بیرون دلنمای $r = 2(1+\cos\theta)$ و درون دایره‌ی $r = 2\sin\theta$ را بدست آورید.

$r = 2\sin\theta \Rightarrow r^2 = 2ar\sin\theta$

$\Rightarrow x^2+y^2 = 2ay \Rightarrow a=1 \Rightarrow$ دایره با مرکز (۰و۱) و شعاع «۱»



$$\Rightarrow \int_{\theta=\pi/2}^{\theta=\pi}\int_{r=2(1+\cos\theta)}^{r=2\sin\theta} 1 \quad r\,dr\,d\theta$$

$$\Rightarrow \int_{\theta=\pi/2}^{\theta=\pi} \left(\frac{4\sin^2\theta}{2} - \frac{4+\overbrace{1+\cos^2\theta}^{\sin^2\theta}+2\cos\theta}{2} \right) d\theta$$

$$\Rightarrow \int_{\theta=\pi/2}^{\theta=\pi} \left(\frac{3\sin^2\theta - 2\cos\theta - 4}{2} \right) d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta\, d\theta - 4\int_{\pi/2}^{\pi} d\theta$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta\right) - \sin\theta\Big|_{\pi/4}^{\pi} - 4\,\theta\Big|_{\pi/4}^{\pi} =$$ حال بنداوم بقیش دیگه راحته ☺

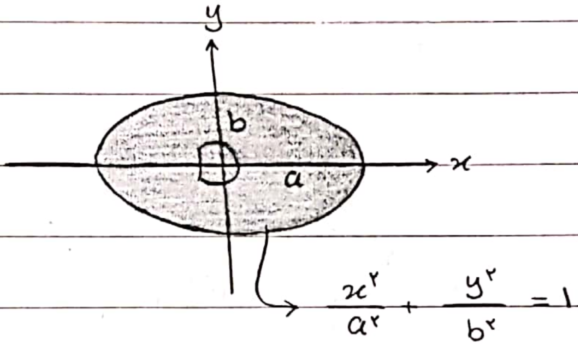
iman NOTEBOOK
Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

نکته مهم: اگر ناحیه‌ی انتگرال گیری بیضی باشد یا قسمتی از بیضی باشد، ابتدا با تغییر متغیر بیضی را به دایره‌ی واحد تبدیل می‌کنیم، سپس از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.

مثال: انتگرال روبه‌رو را حل کنید.

$$\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1} e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\, dA$$



$$\begin{cases} X^2 = x^2/a^2 \to X = x/a \to x = aX \\ Y^2 = y^2/b^2 \to Y = y/b \to y = bY \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow X^2+Y^2=1$$ دایره واحد

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)} = \text{بعد از محاسبه} = ab \qquad dA = dy\,dx = |ab|\,dY\,dX$$

$$I=\iint_{X^2+Y^2\leq 1} e^{X^2+Y^2}\,|ab|\,dY\,dX$$

ادامه در صفحه‌ی بعد...

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

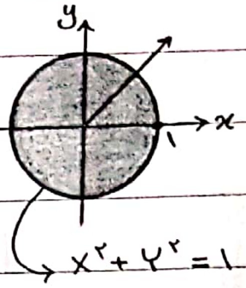
Date: / /

Subject:

$$X = r\cos\theta$$
$$Y = r\sin\theta$$

قطبی

$$\frac{|ab|}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=1} 2e^{r^2}\,\underbrace{r\,dr\,d\theta}_{dY\,dX}$$



$$\dots = \frac{|ab|}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} e^{r^2}\Big|_{r=0}^{r=1}\,d\theta = \frac{|ab|}{2}(e-1)\,\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \dots$$

$$\dots = \frac{|ab|}{2}(e-1)\cdot 2\pi = \pi|ab|(e-1)$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

انتگرال سطح

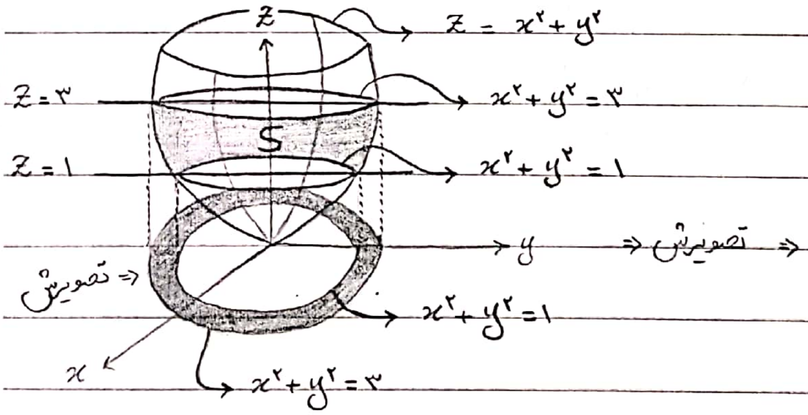
o فرض کنید S یک سطح بسته در فضا باشد، که از معادله‌ی آن بتوان z را برحسب x, y محاسبه کرد، مثلاً $z = z(x, y)$ و تصویر آن بر صفحه‌ی xy (صفحه‌ی $z=0$) ناحیه‌ی بسته D است.

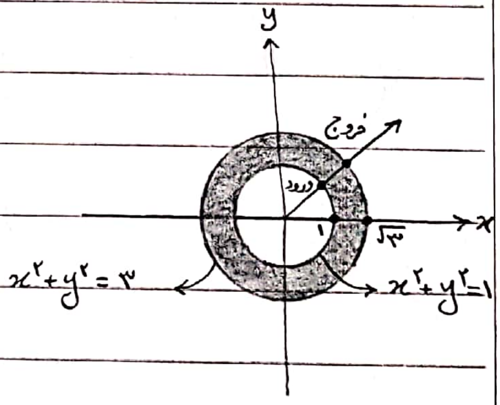
المان سطح $\quad ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\; dydx \; dA$

انتگرال سطح $\quad \iint_S f(x,y,z)\, ds = \iint_D f(x,y,z(x,y)) \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\; dA \; (dydx)$

مساحت سطح S $\quad \iint 1\, ds = \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\; dA$

o مثال o مساحت قسمتی از سطح سهمی‌گون $z = x^2+y^2$ محدود به صفحات $z=1$ و $z=3$ را محاسبه کنید.





$z = x^2 + y^2 \Rightarrow z_x = 2x \;,\; z_y = 2y$

Date: / / Subject:

$$ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\; dA = \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\; dA$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\; dA$$

$$\text{مساحت} = \iint_S 1\, ds = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}\; dA$$

$$= \iint_{1 \leq x^2+y^2 \leq 3} \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}\; dA$$

$$\Rightarrow \text{قطبی} \Rightarrow \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=1}^{r=\sqrt{3}} \sqrt{1+4r^2}\; r\, dr\, d\theta$$

حل با مشتق همراه :

$$\Rightarrow \frac{1}{8} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=1}^{r=\sqrt{3}} \underbrace{8r}_{u'} \underbrace{(1+4r^2)^{1/2}}_{u^{1/2}}\, dr\, d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\frac{(1+4r^2)^{1/2+1}}{1/2+1} \right) \Bigg|_{r=1}^{r=\sqrt{3}} d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{12} \left(\sqrt{(1+12)^3} - \sqrt{(1+4)^3} \right) \theta \Big|_0^{2\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6} \left(13\sqrt{13} - 5\sqrt{5} \right)$$

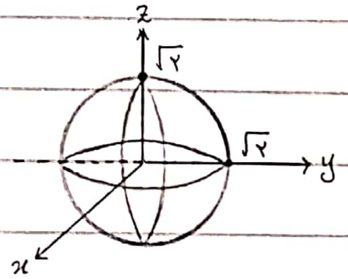
iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

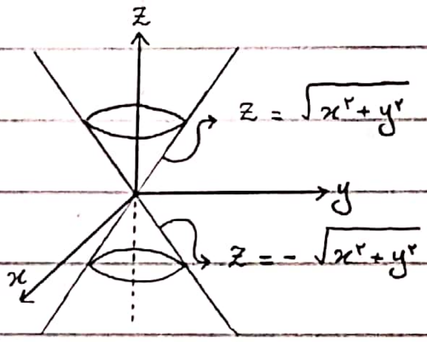
Date: / / Subject:

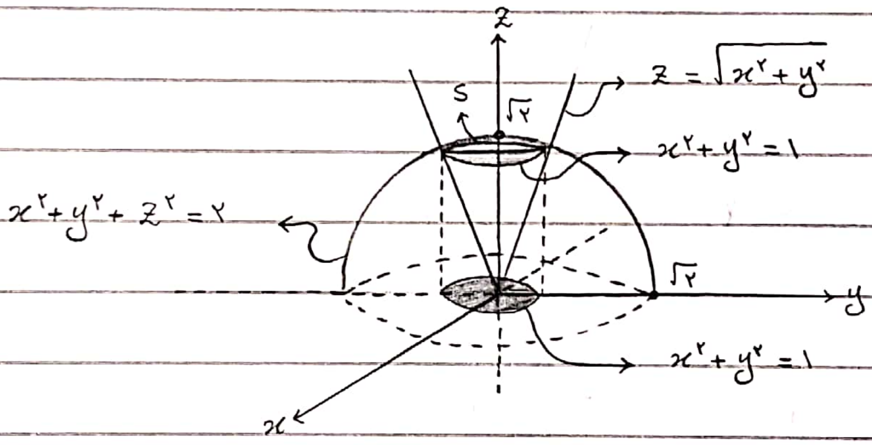
مثال) انتگرال سطح $\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,ds$ را محاسبه کنید که در آن S قسمتی از سطح کره‌ی $x^2+y^2+z^2=2$ است که توسط مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ از آن جدا می‌شود.

$x^2+y^2+z^2=2$



$z^2=x^2+y^2$





معادله‌ی کره و مخروط را تلاقی می‌دهیم $\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ z^2=x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+x^2+y^2=2$

$\Rightarrow 2(x^2+y^2)=2 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=1}$

$z_x=\dfrac{-x}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$ $z_y=\dfrac{-y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$

حال ds را محاسبه می‌کنیم:

$$1+z_x^2+z_y^2=1+\left(\frac{-x}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right)^2=1+\frac{x^2}{2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{2-x^2-y^2}$$

$$=\frac{2-x^2-y^2+x^2+y^2}{2-y^2-x^2}=\frac{2}{2-x^2-y^2}$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

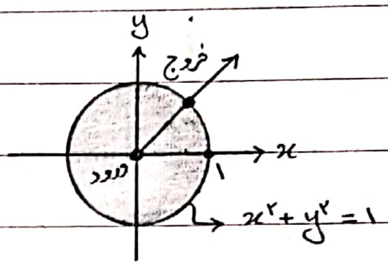
Date: / /　　　　Subject:

$ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\; dA = \sqrt{\frac{2}{2 - x^2 - y^2}}\; dA$

☆

$\Rightarrow \iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\, ds = \iint_D 2\sqrt{\frac{2}{2 - x^2 - y^2}}\; dA$

$\Rightarrow 2\sqrt{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dA}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}$



قطبی $\Rightarrow 2\sqrt{2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{2 - r^2}}$

$\Rightarrow \frac{-2\sqrt{2}}{2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} \underbrace{-2r}_{u'} \underbrace{(2 - r^2)^{-1/2}}_{u^{-1/2}}\; dr\,d\theta$

$\Rightarrow -\sqrt{2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{2})\; d\theta$

$\Rightarrow -\sqrt{2}(2 - 2\sqrt{2})\; \theta \Big|_0^{2\pi} = -2\sqrt{2}(1 - \sqrt{2})(2\pi)$

$\Rightarrow -4\sqrt{2}\,\pi(1 - \sqrt{2}) = 4\sqrt{2}\,\pi(\sqrt{2} - 1)$

مثال ۵ درمثال قبل مساحت سطح S را بدست آورید.

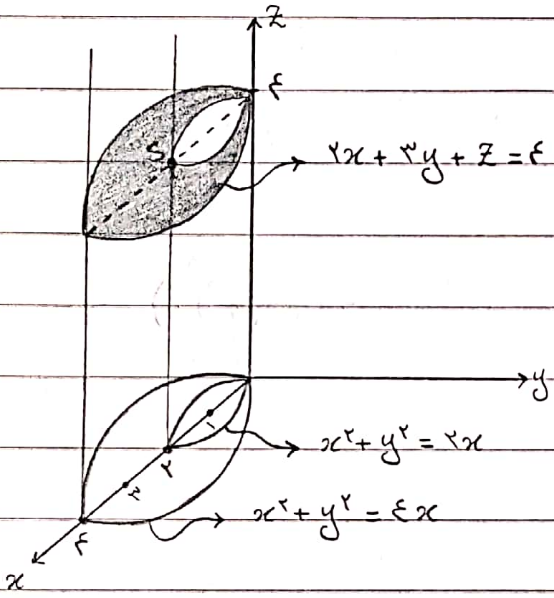
مساحت $\iint 1\, ds = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\; dA = \iint_D \sqrt{\frac{2}{2 - x^2 - y^2}}\; dA$　　همانند ☆ حل می‌شود و فقط ضریب ۲ را ندارد بنابراین می‌شود ⇐

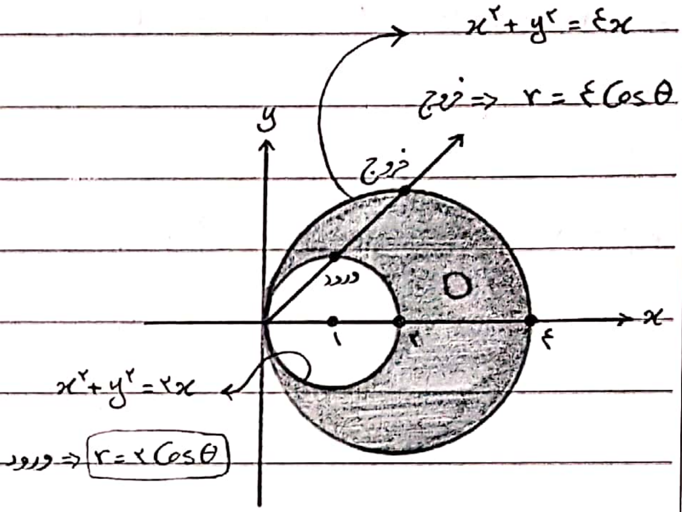
مساحت : $2\sqrt{2}\,\pi(\sqrt{2} - 1)$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

مثال ۵ انتگرال $\iint_S xy(z+3y)\,ds$ را محاسبه کنید که در آن S قسمتی از سطح صفحه‌ی $2x+3y+z=4$ که محدود به استوانه‌های $x^2+y^2=2x$ و $x^2+y^2=4x$ است.





$$2x+3y+z=4 \Rightarrow z=4-2x-3y \Rightarrow \begin{cases} z_x=-2 \\ z_y=-3 \end{cases}$$

$$ds=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dA=\sqrt{1+(-2)^2+(-3)^2}\,dA=\sqrt{14}\,dA$$

$$\Rightarrow \iint_S xy(z+3y)\,ds=\iint_D xy(4-x)\sqrt{14}\,dA$$

$$\Rightarrow \iint_{2x\le x^2+y^2\le 4x} xy(4-x)\sqrt{14}\,dA$$

$$\Rightarrow \int_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2}\int_{r=2\cos\theta}^{r=4\cos\theta}(r\cos\theta)(r\sin\theta)(4-r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta =$$

$$\Rightarrow \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\int_{r=2\cos\theta}^{r=4\cos\theta}(\sin\theta\cos\theta)(r^3)-(\sin\theta\cos^2\theta)(r^4)\,dr\,d\theta$$

$$\Rightarrow \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos\theta)\left(\frac{256\cos^4\theta-16\cos^4\theta}{4}\right)-(\sin\theta\cos^2\theta)\left(\frac{4^5\cos^5\theta-2^5\cos^5\theta}{5}\right)d\theta$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow -80\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{-\sin\theta}_{u'}\ \underbrace{\cos^5\theta}_{u^5}\, d\theta + \frac{1024}{5}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{-\sin\theta}_{u'}\ \underbrace{\cos^7\theta}_{u^7}$$

$$\Rightarrow -80 \times \left(\frac{\cos^6(\pi/2) - \cos^6(-\pi/2)}{6}\right) + \frac{1024}{5} \times \left(\frac{\cos^8(\pi/2) - \cos^8(-\pi/2)}{8}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{-80}{6}\underbrace{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6\right)}_{0} + \frac{1024}{40}\underbrace{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8\right)}_{0} = 0$$

○ مثال ○ مساحت قسمت کوچکی از سهمی گون $z = x^2 + y^2$ که توسط صفحه‌ی $z = 2x$ از آن بریده می‌شود را حساب کنید.

$$\left.\begin{aligned} z &= x^2 + y^2 \\ z &= 2x \end{aligned}\right\} \longrightarrow x^2 + y^2 = 2x$$

○ بیخیال بقیه‌ی جواب ☺

○ مثال ○ مساحت قسمت کوچکی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ که توسط استوانه‌ی $x = z^2$ از آن بریده می‌شود را بنویسید.

$$\left.\begin{aligned} z^2 &= x^2 + y^2 \\ z^2 &= x \end{aligned}\right\} \longrightarrow x^2 + y^2 = x$$ دایره‌ی تصویر

○ اینم بیخیالش ☺

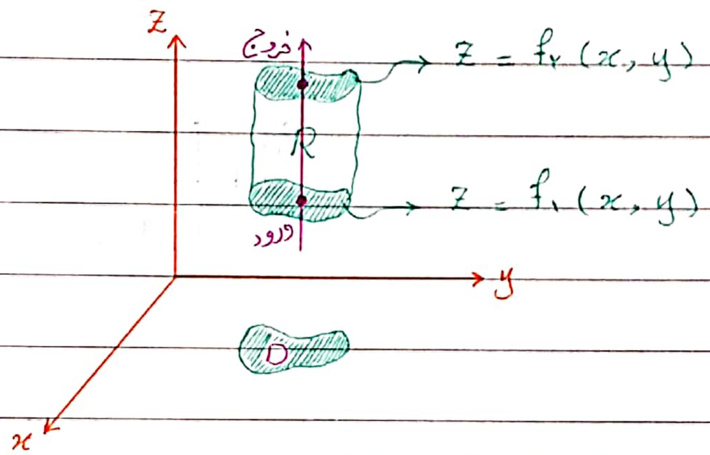
iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

انتگرال سه‌گانه

○ فرض کنید R یک حجم بسته در فضا باشد که در امتداد محور z ها، محدود به رویه‌های $z=f_1(x,y)$ و $z=f_2(x,y)$ است و تصویر آن بر صفحه‌ی xy (صفحه‌ی $z=0$) ناحیه‌ی بسته‌ی D است.



المان حجم $dV = dz\,dy\,dx = dz\,dA$

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left[\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA = \iint_D g(x,y)\,dA$$

(حد بالا: خروج، حد پایین: ورود؛ عبارت داخل کروشه: $g(x,y)$؛ $dA = dy\,dx$)

○ برای تعیین حدود انتگرال سه‌گانه به صورت زیر عمل می‌کنیم ○

○۱○ با فرض اینکه بتوان تصویر ناحیه را در امتداد محور z ها بر صفحه‌ی xy (صفحه‌ی $z=0$) بدست آورد ابتدا می‌نویسیم: $dV = dz\,dA$

○۲○ خطی را در ناحیه‌ی مورد نظر در امتداد محور z ها رسم می‌کنیم. رویه‌های ورودی و خروجی را به صورت $z=f_1(x,y)$ و $z=f_2(x,y)$ بدست می‌آوریم، بدین ترتیب حدود بالا و پایین انتگرال داخلی بدست می‌آید.

○۳○ انتگرال داخلی را نسبت به z حل می‌کنیم و از حاصل آن روی ناحیه‌ی تصویر D انتگرال دوگانه می‌گیریم.
انتگرال دوگانه‌ی حاصل با مختصات قطبی حل می‌شود.

$$\text{حجم ناحیه } R = \iiint_R 1\,dV = \iiint_R dz\,dy\,dx$$

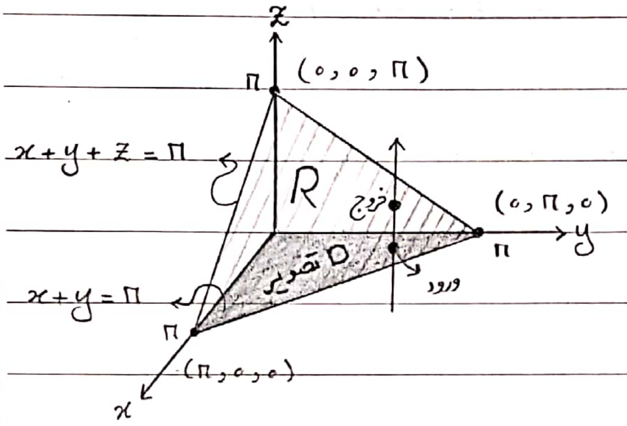
iman NOTEBOOK

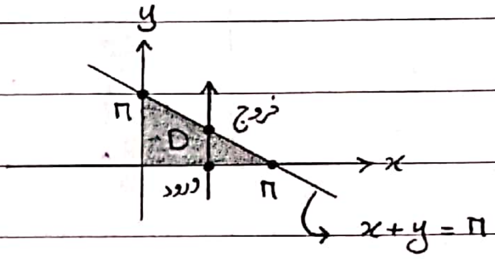
Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

مثال ۵ انتگرال $\iiint_R \sin(2x+3y+4z)\,dv$ را حساب کنید که در آن R ناحیه محدود

به صفحات مختصات و صفحه $x+y+z=\pi$ در ناحیه ۱/۸ اول است.





$$\iiint_R \sin(2x+3y+4z)\,dv = \iint_D \int_{z=0}^{z=\pi-x-y} \sin(2x+3y+4z)\,dz\,dA$$

$$= \iint_D -\frac{1}{4}\cos(2x+3y+4z)\Big|_{z=0}^{z=\pi-x-y} dA$$

$$= \iint_D \left(\frac{-1}{4}\right)\left\{\cos(2x+y) - \cos(2x+3y)\right\} dA$$

$$= \frac{-1}{4}\int_{x=0}^{x=\pi}\int_{y=0}^{y=\pi-x} \left\{\cos(2x+y) - \cos(2x+3y)\right\} dy\,dx$$

$$= \frac{-1}{4}\int_{x=0}^{x=\pi} \left\{\sin(2x+y) - \frac{1}{3}\sin(2x+3y)\right\}\Big|_{y=0}^{y=\pi-x} dx$$

$$= \frac{-1}{4}\int_{x=0}^{x=\pi} \left\{\overbrace{\sin(x+\pi)}^{-\sin x} - \frac{1}{3}\overbrace{\sin(3\pi-x)}^{\sin x} - \sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(2x)\right\} dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int_{x=0}^{x=\pi} \left\{-\sin x - \frac{1}{3}\sin x - \frac{2}{3}\sin(2x)\right\}$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

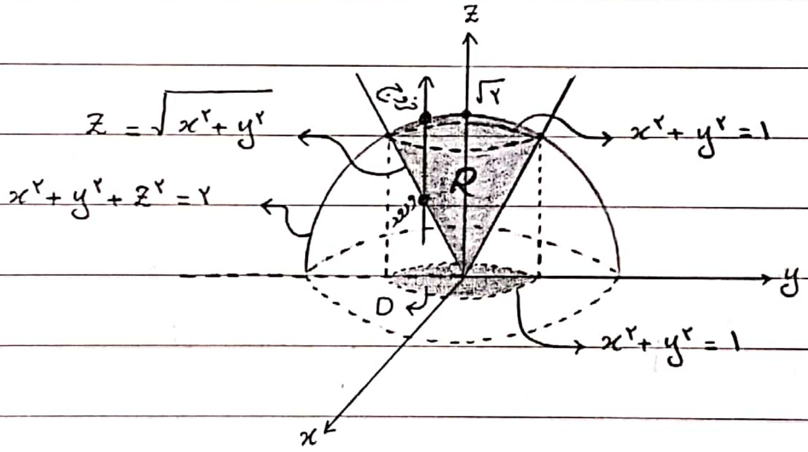
$= \frac{-1}{4} \left\{ \int_0^{\pi} (-\sin x) + \frac{1}{3} \int_0^{\pi} (-\sin x) + \frac{2}{3} \int_0^{\pi} (-\sin 2x) \right\}$

$= \frac{-1}{4} \left\{ \cos x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{3} \cos x \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\pi} \right\}$

$= \frac{-1}{4} \left\{ (-1-1) + \frac{1}{3} (-1-1) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \times (1-1) \right) \right\}$

$= \frac{-1}{4} \left\{ -2 - \frac{2}{3} \right\} = \frac{1}{4} \times \frac{14}{6} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$

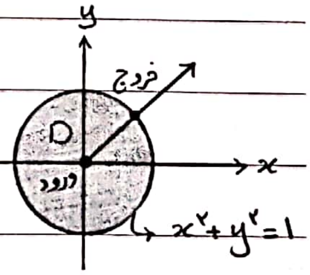
مثال ○ حجم ناحیه‌ی محدود به درون مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ و کره‌ی $x^2+y^2+z^2=2$ را بدست آورید.



$\text{حجم} \iiint_R 1\, dV = \iint_D \int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=\sqrt{2-x^2-y^2}} 1\, dz\, dA$

$= \iint_D \left(\sqrt{2-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2} \right) dA$

قطبی $\Rightarrow \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} \left(\sqrt{2-r^2} - r \right) r\, dr\, d\theta$



NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

$$= \int_{\theta=۰}^{\theta=۲\pi} \int_{r=۰}^{r=۱} \left(r\sqrt{۲-r^۲} - r^۲ \right) dr\,d\theta$$

$$= \int_{\theta=۰}^{\theta=۲\pi} \left(\frac{-۱}{۲} \int_{r=۰}^{r=۱} \underbrace{-۲r}_{u'} \underbrace{\sqrt{۲-r^۲}}_{u^{۱/۲}}\, dr - \int_{r=۰}^{r=۱} r^۲\, dr \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=۰}^{\theta=۲\pi} \left(\frac{-۱}{۲} \left(\frac{۲(۲-r^۲)^{۳/۲}}{۳} \right) \Big|_۰^۱ - \left(\frac{r^۳}{۳} \right) \Big|_۰^۱ \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=۰}^{\theta=۲\pi} \left(\left(\frac{-۱}{۳}\right)\left(۱ - ۲\sqrt{۲}\right) - \left(\frac{۱}{۳}\right) \right) d\theta$$

$$= \left(\left(\frac{-۱}{۳} + \frac{۲\sqrt{۲}}{۳} \right) - \left(\frac{۱}{۳} \right) \right) \theta \Big|_۰^{۲\pi}$$

$$= \left(\frac{۲\sqrt{۲}}{۳} - \frac{۲}{۳} \right)(۲\pi) = \frac{۴\pi}{۳}\left(\sqrt{۲} - ۱\right)$$

۵) می‌توان مستقیم هم تعیین حدود کرد

$$V = \int_{x=-۱}^{x=۱} \int_{y=-\sqrt{۱-x^۲}}^{y=\sqrt{۱-x^۲}} \int_{z=\sqrt{x^۲+y^۲}}^{z=\sqrt{۲-x^۲-y^۲}} ۱\; dz\,dy\,dx$$

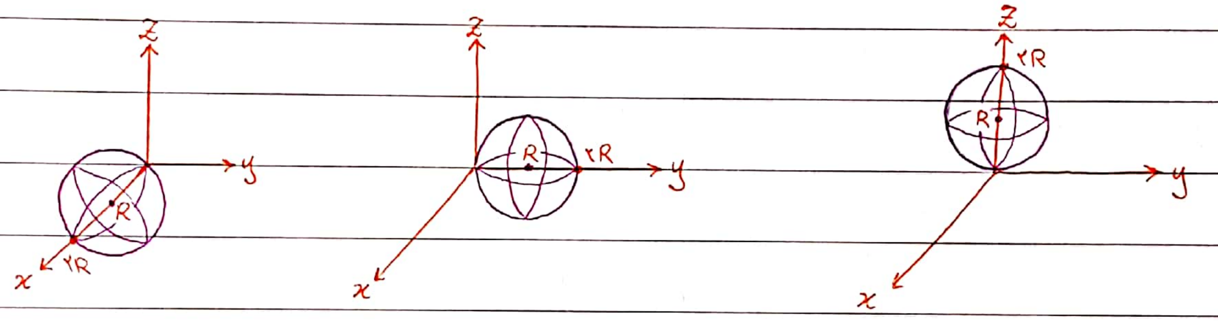
Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

کره‌های خاص

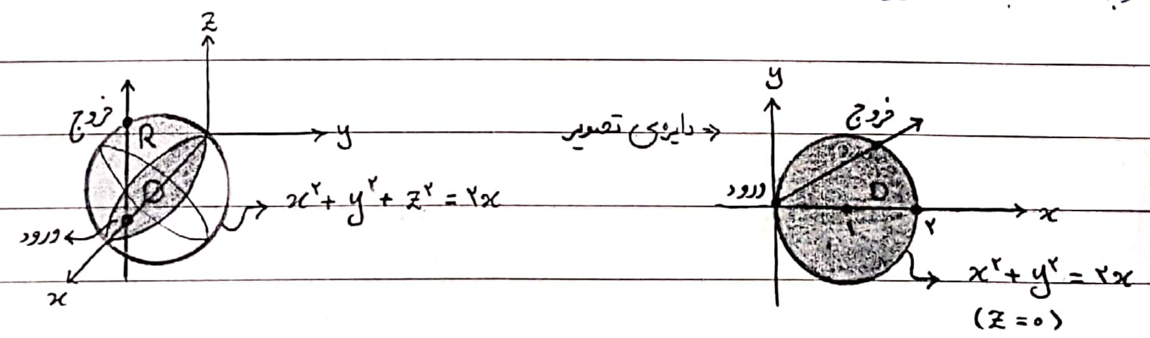
کره با شعاع R

$$x^2+y^2+z^2=\begin{cases} R^2 & \Rightarrow \text{مرکز مبداء} \\ 2Rx & \Rightarrow (R,0,0)\ \text{مرکز} \\ 2Ry & \Rightarrow (0,R,0)\ \text{مرکز} \\ 2Rz & \Rightarrow (0,0,R)\ \text{مرکز} \end{cases}$$



$x^2+y^2+z^2=2Rx$ $\quad$ $x^2+y^2+z^2=2Ry$ $\quad$ $x^2+y^2+z^2=2Rz$

مثال: انتگرال $\iiint_R 2xyz\,dv$ را حساب کنید که در آن R نیم‌کره‌ی بالایی کره $x^2+y^2+z^2=2x$ در جهت مثبت محور z هاست.



$$I=\iiint_R 2xyz\,dv=\iint_D\int_{z=0}^{z=\sqrt{2x-x^2-y^2}} 2xyz\ dz\,dA$$

$$I=\iint_D xyz^2\Big|_{z=0}^{z=\sqrt{2x-x^2-y^2}}\ dA=\iint_D xy(2x-x^2-y^2)\ dA$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

قطبی $\Rightarrow \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=2\cos\theta} (r\cos\theta)(r\sin\theta)(2r\cos\theta - r^2)\, r\, dr\, d\theta$

$$\Rightarrow \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=2\cos\theta} \left(r^4 2\sin\theta\cos^2\theta - r^5 \sin\theta\cos\theta\right) dr\, d\theta$$

$$\Rightarrow \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left(\frac{32}{5}\sin\theta\cos^6\theta - \frac{64}{6}\sin\theta\cos^7\theta\right) d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{-32}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{-\sin\theta}_{u'}\underbrace{\cos^6\theta}_{u^6}\, d\theta + \frac{64}{6}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \underbrace{-\sin\theta}_{u'}\underbrace{\cos^7\theta}_{u^7}\, d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{-32}{5} \times \frac{\cos^7\theta}{7}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{64}{6} \times \frac{\cos^8\theta}{8}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{-32}{35}\Big(\underbrace{(0)^7 - (0)^7}_{0}\Big) + \frac{64}{48}\Big(\underbrace{(0)^8 - (0)^8}_{0}\Big) = 0$$

تعیین حدود مستقیم برای همین سوال

$$\int_{x=0}^{x=2} \int_{y=-\sqrt{2x-x^2}}^{y=\sqrt{2x-x^2}} \int_{z=0}^{z=\sqrt{2x-x^2-y^2}} 2xyz\; dz\, dy\, dx$$

تابع فرد نسبت به y

$$\Rightarrow \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=-\sqrt{2x-x^2}}^{y=\sqrt{2x-x^2}} xy(2x - x^2 - y^2)\, dy\, dx = 0$$

نکته $\Rightarrow \int_{-a}^{+a} f(y)\, dy = 0$ ، y فرد

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

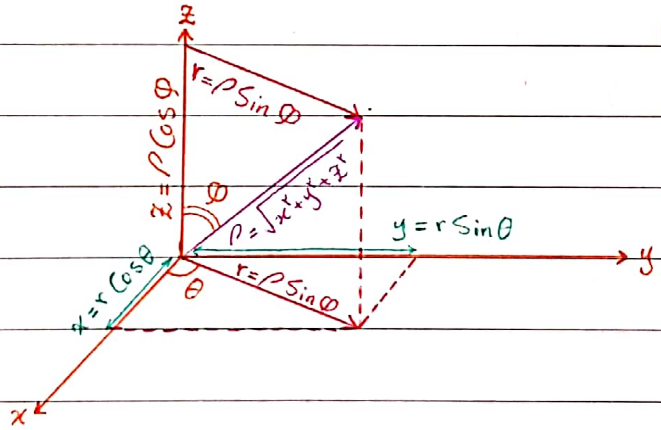
مختصات استوانه‌ای

○ اگر در انتگرال سه‌گانه z را ثابت نگه داریم و x, y را به صورت قطبی تبدیل کنیم، آنگاه از مختصات استوانه‌ای استفاده کرده‌ایم.

○ برای این منظور ابتدا می‌نویسیم $dV = dz\,dA$ و انتگرال داخلی را نسبت به z تعیین حدود کرده و حل می‌کنیم، و در نهایت انتگرال دوگانه‌ی حاصل را در مختصات قطبی حل می‌کنیم. (همانند دو مثال قبلی)

مختصات کروی

○ اگر ناحیه‌ی انتگرال‌گیری قسمتی از کره یا مخروط باشد یا در تابع زیر انتگرال معادله‌ی کره یا مخروط را داشته باشیم می‌توان از مختصات کروی استفاده کرد.



φ ⇐ زاویه با قسمت مثبت محور z ها

θ ⇐ زاویه با قسمت مثبت محور x ها

ρ ⇐ فاصله تا مرکز

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \text{یا} \quad \rho^2 = x^2+y^2+z^2 \\ z = \rho\cos\varphi \\ x = r\cos\theta = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\theta = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \quad , \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \quad \text{یا} \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi \end{cases}$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

ژاکوبین $J = \dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} = \rho^2 \sin\varphi$

$dV = dz\,dy\,dx = \rho^2 \sin\varphi \; d\rho \; d\varphi \; d\theta$

نکات مهم:

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ کره با مرکز مبداء و شعاع R

$\Rightarrow \rho^2 = R^2 \Rightarrow \rho = R$

$$x^2+y^2+z^2 = \begin{cases} R^2 & \longleftrightarrow \quad \rho = a \\ 2Rx & \longleftrightarrow \quad \rho = 2R\sin\varphi\cos\theta \\ 2Ry & \longleftrightarrow \quad \rho = 2R\sin\varphi\sin\theta \\ 2Rz & \longleftrightarrow \quad \rho = 2R\cos\varphi \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= \rho^2\sin^2\varphi \\ z^2 &= \rho^2\cos^2\varphi \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{x^2+y^2}{z^2} = \tan^2\varphi$$

مخروط $\Rightarrow x^2+y^2 = z^2 \rightarrow \dfrac{x^2+y^2}{z^2} = 1 \rightarrow \tan^2\varphi = 1 \rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4}$

مخروط
$$\begin{cases} z^2 = x^2+y^2 & \longrightarrow \varphi = \pi/4 \\ z^2 = 3(x^2+y^2) & \longrightarrow \varphi = \pi/6 \\ z^2 = \frac{1}{3}(x^2+y^2) & \longrightarrow \varphi = \pi/3 \end{cases}$$

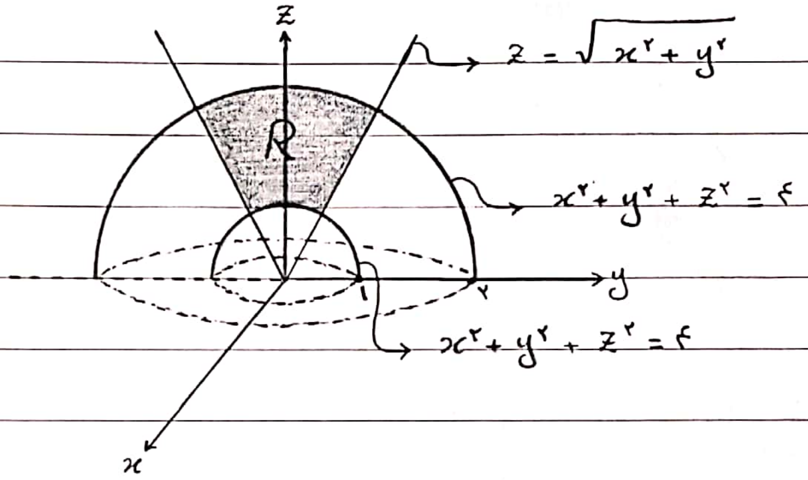
○ برای تعیین حدود در مختصات کروی یک شعاع حاملی را از مرکز به ناحیه‌ی مورد نظر وارد می‌کنیم سطوح یا رویه‌های ورودی و خروجی را به صورت $\rho = f_1(\varphi, \theta)$ و $\rho = f_2(\varphi, \theta)$ بدست می‌آوریم. کمترین و بیشترین مقدار φ و θ را تعیین می‌کنیم.

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

مثال: حجم ناحیه‌ی محدود به درون مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و کره‌های $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=4$ را محاسبه کنید.



حجم : $\iiint_R 1\,dV = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}}\int_{\rho=1}^{\rho=2} \rho \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$

$\Rightarrow \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \, d\varphi \int_{\rho=1}^{\rho=2} \rho^2 d\rho$

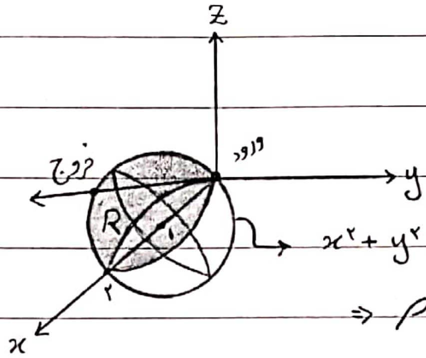
$\Rightarrow (2\pi)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{7\pi}{3}\left(\sqrt{2}-2\right)$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

مثال ○ انتگرال $\iiint_R 2xyz \, dv$ را محاسبه کنید که در آن R نیم‌کره‌ی بالایی کره $x^2+y^2+z^2=2x$ است.



$x^2+y^2+z^2=2x$

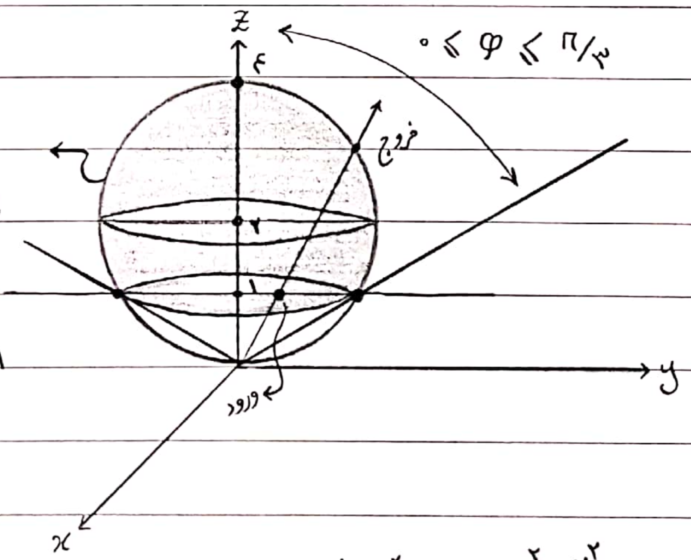
$\Rightarrow \rho = 2\sin\varphi\cos\theta$

$$V = \int_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \int_{\rho=0}^{\rho=2\sin\varphi\cos\theta} 2(\rho\sin\varphi\cos\theta)(\rho\sin\varphi\sin\theta)(\rho\cos\varphi)\rho^2 \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$\ldots = 0$

مثال ○ انتگرال $\iiint_R \sqrt{x^2+y^2+z^2} \, dv$ را محاسبه کنید که در آن R ناحیه‌ی بالای صفحه‌ی $z=1$ و محدود به درون کره $x^2+y^2+z^2=4z$ است.

$0 \leq \varphi \leq \pi/3$



$x^2+y^2+z^2=4z$

$\rho = 4\cos\varphi$ خروج

صفحه $z=1$

$\rho\cos\varphi = 1$

ورود $\rho = \dfrac{1}{\cos\varphi}$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4z \\ z=1 \end{cases} \rightarrow x^2+y^2=3 \rightarrow \tan^2\varphi = \frac{x^2+y^2}{z^2} = \frac{3}{1^2} = 3 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

$$\int_{\theta=۰}^{\theta=۲\pi}\int_{\varphi=۰}^{\varphi=\pi/۳}\int_{\rho=۱/\cos\varphi}^{\rho=۴\cos\varphi} \rho\cdot\rho^{۲}\sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$=\int_{\theta=۰}^{\theta=۲\pi}\int_{\varphi=۰}^{\varphi=\pi/۳} \frac{۱}{۴}\sin\varphi\left(۴^{۴}\cos^{۴}\varphi-\cos^{-۴}\varphi\right) d\varphi\, d\theta$$

$$=\int_{\theta=۰}^{\theta=۲\pi}\int_{\varphi=۰}^{\varphi=\pi/۳} \frac{۱}{۴}\left(۴^{۴}\sin\varphi\cos^{۴}\varphi-\sin\varphi\cos^{-۴}\varphi\right) d\varphi\, d\theta$$

$$=\int_{\theta=۰}^{\theta=۲\pi}\frac{۱}{۴}\left\{-۴^{۴}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۳}}\underbrace{-\sin\varphi}_{u'}\,\underbrace{\cos^{۴}\varphi}_{u^{۴}}\, d\varphi+\int_{۰}^{\frac{\pi}{۳}}\underbrace{-\sin\varphi}_{u'}\,\underbrace{\cos^{-۴}\varphi}_{u^{-۴}}\, d\varphi\right\} d\theta$$

$$=\int_{\theta=۰}^{\theta=۲\pi}\frac{۱}{۴}\left\{\frac{-۴^{۴}}{۵}\cos^{۵}\varphi\Big|_{۰}^{\pi/۳}+\frac{\cos^{-۳}\varphi}{-۳}\Big|_{۰}^{\pi/۳}\right\} d\theta$$

$$=\int_{\theta=۰}^{\theta=۲\pi}\frac{۱}{۴}\left\{\frac{-۴^{۴}}{۵}\left(\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۵}-(۱)^{۵}\right)+\left(-\frac{۱}{۳}\right)\left(\frac{۱}{(۱/۲)^{۳}}-\frac{۱}{(۱)^{۳}}\right)\right\} d\theta$$

$$=\theta\Big|_{۰}^{۲\pi}\frac{۱}{۴}\left\{\frac{-۴^{۴}}{۵}\left(\frac{۱}{۳۲}-\frac{۳۲}{۳۲}\right)+\left(-\frac{۱}{۳}\right)(۸-۱)\right\}$$

$$=\frac{۲\pi}{۴}\left\{\frac{۴^{۴}\times ۳۱}{۵\times ۳۲}-\frac{۷}{۳}\right\}$$

Date: / / Subject:

انتگرال خط

○ فرض کنید $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ میدان نیرو باشد و منحنی c با معادله‌ی پارامتری

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{یا} \quad C: \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

را داشته باشیم، کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ روی مسیر c از نقطه $A\begin{vmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{vmatrix}$ تا $B\begin{vmatrix} x(t_1) \\ y(t_1) \\ z(t_1) \end{vmatrix}$

به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{کار} = \int_A^B \vec{F}.\vec{dr} = \int_A^B M dx + N dy + P dz$$

$$\vec{dr} = (dx, dy, dz)$$
$$\vec{F} = (M, N, P)$$
$$\vec{F}.\vec{dr} = M dx + N dy + P dz$$

○ برای حل انتگرال خط از شکل پارامتری منحنی شروع می‌کنیم ○

$$x = x(t) \longrightarrow dx = x'(t)\, dt$$
$$y = y(t) \longrightarrow dy = y'(t)\, dt$$
$$z = z(t) \longrightarrow dz = z'(t)\, dt$$

$$A \longleftrightarrow t = t_0$$
$$B \longleftrightarrow t = t_1$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

مثال ۵) کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = \underbrace{(x-y+z)}_{M}\vec{i} + \underbrace{(x+y-z)}_{N}\vec{j} + \underbrace{(x+y+z)}_{P}\vec{k}$

روی مسیر $C: \vec{r}(t) = \underbrace{t}_{x}\vec{i} + \underbrace{t^2}_{y}\vec{j} + \underbrace{t^3}_{z}\vec{k}$ از نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}-1\\1\\-1\end{vmatrix}$ تا $B\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}$ را محاسبه کنید.

$$\text{کار} = \oint_A^B M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

$$= \int_{(-1,1,-1)}^{(1,1,1)} (x-y+z)\,dx + (x+y-z)\,dy + (x+y+z)\,dz$$

$$\begin{cases} x = t \longrightarrow dx = dt \\ y = t^2 \longrightarrow dy = 2t\,dt \\ z = t^3 \longrightarrow dz = 3t^2\,dt \end{cases} \qquad \begin{cases} A \longleftrightarrow t=-1 \\ B \longleftrightarrow t=1 \end{cases}$$

$$\text{کار} = \int_{t=-1}^{t=1} \left\{ (t-t^2+t^3)\,dt + (t+t^2-t^3)\,2t\,dt + (t+t^2+t^3)\,3t^2\,dt \right\}$$

$$\text{کار} = \int_{t=-1}^{t=1} \left\{ t - t^2 + t^3 + 2t^2 + 2t^3 - 2t^4 + 3t^3 + 3t^4 + 3t^5 \right\} dt$$

$$\text{کار} = \int_{t=-1}^{t=1} \left\{ t^2 + t^4 \right\} dt$$

۵ نکته ۵) $$\int_{-a}^{+a} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 \quad , \quad f \text{ فرد} \\ 2\int_0^a f(t)\,dt \quad , \quad f \text{ زوج} \end{cases}$$

$$\text{کار} = 2\int_0^1 (t^2 + t^4)\,dt = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)$$

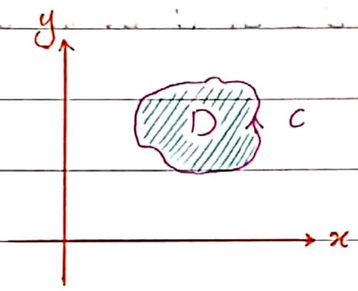
iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /　　　Subject:

قضیه‌ی گرین

○ فرض کنید C یک منحنی بسته در صفحه‌ی xy باشد که ناحیه‌ی بسته‌ی D را محدود کرده است
(C اغلب از اجتماع چندین منحنی ساده تشکیل می‌شود.)



$$\underbrace{\oint_C P\,dx + Q\,dy}_{\text{انتگرال خط}} = \underbrace{\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{\text{انتگرال دوگانه}} dA$$

iman NOTEBOOK

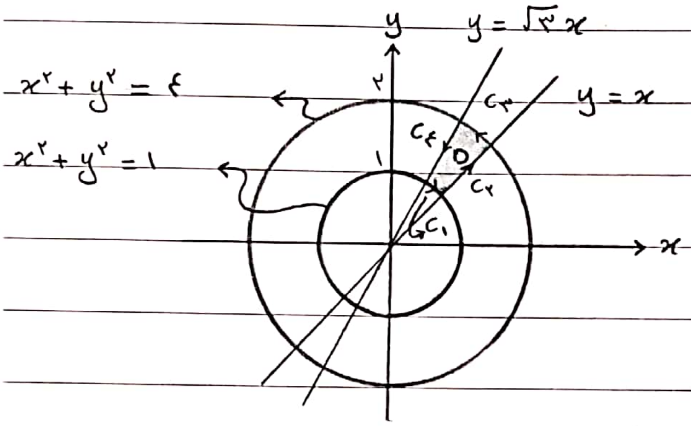
Scanned by CamScanner

Date: / /　　　Subject:

مثال ۵ انتگرال $\oint_c (-y^3/3 + x)\,dx + (x^3/3 + y)\,dy$ را محاسبه کنید که در آن

c مرز ناحیه‌ی محدود به دایره‌های $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ و خطوط $x=y$ و $y=\sqrt{3}x$

در ربع اول است.



$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$

$$\oint_c \left(\frac{-y^3}{3} + x\right) dx + \left(\frac{x^3}{3} + y\right) dy = \dots$$

$$\dots \underset{\text{قضیه گرین}}{\overset{\text{مسیر بسته}}{=}} \iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{3} + y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y^3}{3} + x\right) \right\} dA = \dots$$

$$\dots = \iint_D (x^2+y^2)\, dA \overset{\text{قطبی}}{=} \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/3} \int_{r=1}^{r=2} r^2 . r\, dr\, d\theta = \dots$$

$$\dots = \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/3} \frac{r^4}{4}\Big|_{r=1}^{r=2} d\theta = \theta\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{r^4}{4}\Big|_{r=1}^{r=2} = \dots$$

$$\dots = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{15}{4}\right)$$

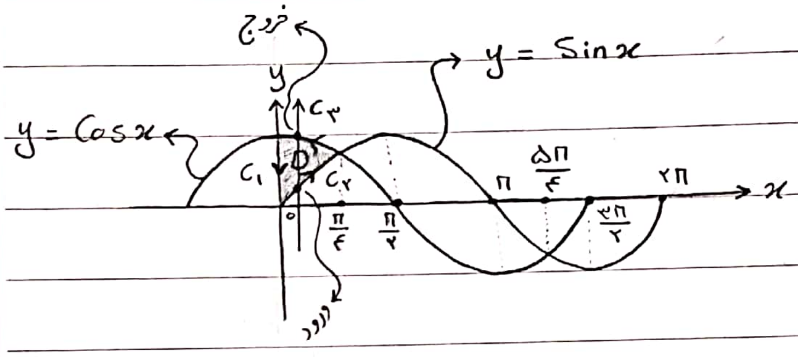
iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /

Subject:

مثال ۵ انتگرال $\oint_c (e^{x^2}+y)\,dx + (xy+x+e^{y^2})\,dy$ را محاسبه کنید که در آن c مرز ناحیه‌های محدود به منحنی‌های $y=\sin x$ و $y=\cos x$ و محور y ها در فاصله‌ی $0 \leq x \leq \pi/4$ است.



مسیر بسته $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$

$$\oint_c (e^{x^2}+y)\,dx + (xy+x+e^{y^2})\,dy = \dots$$

$$\dots \xrightarrow[\text{تفضیه گرین}]{\text{مسیر بسته}} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy+x+e^{y^2}) - \frac{\partial}{\partial y}(e^{x^2}+y) \right) dA = \dots$$

$$\dots = \iint_D (y+1-1)\,dA = \dots$$

$$\dots = \int_{x=0}^{x=\pi/4} \int_{y=\sin x}^{y=\cos x} y\,dy\,dx = \dots$$

$$\dots = \int_{x=0}^{x=\pi/4} \frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx = \dots$$

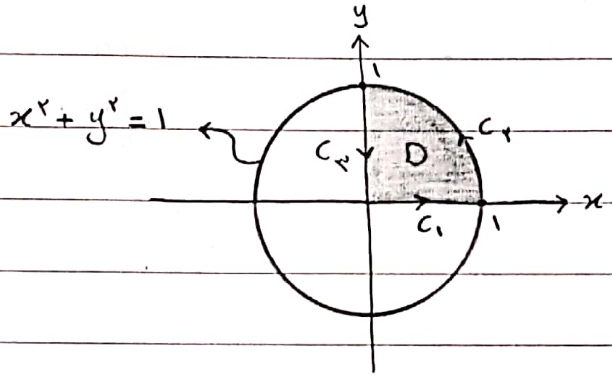
$$\dots = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin(2x) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

مثال: انتگرال $\oint_C (2y + \cos x)\,dx + (3x + \sin y)\,dy$ را حساب کنید که در آن C مرز محدود به دایره $x^2 + y^2 = 1$ و محورهای مختصات در ربع اول است.



$$\oint_C (2y + \cos x)\,dx + (3x + \sin y)\,dy = \dots$$

$$\dots \xrightarrow[\text{قضیه گرین}]{\text{مسیر بسته}} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(3x + \sin y) - \frac{\partial}{\partial y}(2y + \cos x) \right) dA = \dots$$

$$\dots = \iint_D (3 - 2)\,dA = \iint_D 1\,dA$$

$\Rightarrow$ مساحت D $= \frac{1}{4}(\pi)(1)^2 = \frac{\pi}{4}$ مساحت یک ربع دایره با شعاع «۱»

Scanned by CamScanner

Date: / /

Subject:

شکل پارامتری دایره و بیضی

۱) $x^2+y^2=a^2 \rightarrow \underbrace{\left(\frac{x}{a}\right)^2}_{\cos^2 t}+\underbrace{\left(\frac{y}{a}\right)^2}_{\sin^2 t}=1 \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a}=\cos t \Rightarrow x=a\cos t \\ \frac{y}{a}=\sin t \Rightarrow y=a\sin t \end{cases}$ ، $0\leqslant t\leqslant 2\pi$

۲) $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2 \rightarrow \begin{cases} x=a\cos t+\alpha \\ y=a\sin t+\beta \end{cases}$ ، $0\leqslant t\leqslant 2\pi$

۳) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$ ، $0\leqslant t\leqslant 2\pi$

۴) $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \rightarrow \begin{cases} x=a\cos t+\alpha \\ y=b\sin t+\beta \end{cases}$ ، $0\leqslant t\leqslant 2\pi$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

کرل و دیورژانس

میدان نیرو $\vec{F} = (M, N, P) = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$

(دل) نابلا $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

دیورژانس $div\,\vec{F} = \vec{\nabla}.\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).(M, N, P) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$

کرل $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \dots$

$$\dots = \vec{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ N & P \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & P \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ M & N \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \vec{i}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

مثال ○ کرل و دیورژانس میدان بردار زیر را حساب کنید.

$$\vec{F} = (xyz)\vec{i} + (x+y+z)\vec{j} + (x^2+y^2+z^2)\vec{k}$$

$$div\ \vec{F} = \vec{\nabla}.\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xyz) + \frac{\partial}{\partial y}(x+y+z) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2) = \dots$$

$$\dots = yz + 1 + 2z$$

$$\text{کرل} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & x+y+z & x^2+y^2+z^2 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \vec{i}(2y-1) - \vec{j}(2x-xy) + \vec{k}(1-xz)$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /　　　　Subject:

میدان پایستار

انتگرال مستقل از مسیر

○ هرگاه کرل میدان $F = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ صفر باشد (یعنی $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$) آنگاه میدان F را پایستار گویند. در چنین حالتی انتگرال خط $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B M dx + N dy + P dz$ مستقل از مسیر است. یعنی حاصل آن به منحنی مسیر حرکت بستگی ندارد، و فقط به نقطه‌ی A و B بستگی دارد؛ در چنین حالتی تابعی مانند $f(x, y, z)$ وجود دارد، به طوری که $df = M dx + N dy + P dz$: به عبارتی دیگر برابر است با:

$$\begin{cases} f_x = M \\ f_y = N \\ f_z = P \end{cases}$$

$$\int_A^B M dx + N dy + P dz = \int_A^B df = f_{(B)} - f_{(A)}$$

○ روش بدست آوردن f ○

○ انتگرال های $\int M dx$ ، $\int N dy$ ، $\int P dz$ را محاسبه می کنیم و حاصل هر سه تا را با هم جمع می کنیم و موقع جمع کردن از عبارت های مشترک در هر دو یا در هر سه تا، فقط یکی را می نویسیم.

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

مثال: انتگرال خط زیر را محاسبه کنید:

$$\int_{A\left|\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right.}^{B\left|\begin{smallmatrix}-1\\0\\1\end{smallmatrix}\right.} \underbrace{(2xy + y^2 + 3x^2z^3 + 1)}_{M}\,dx + \underbrace{(x^2 + 2xy + 1)}_{N}\,dy + \underbrace{(3x^3z^2 + 1)}_{P}\,dz$$

$F = (M, N, P)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xy + y^2 + 3x^2z^3 + 1 & x^2 + 2xy + 1 & 3x^3z^2 + 1 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \vec{i}(0 - 0) - \vec{j}(9x^2z^2 - 9x^2z^2) + \vec{k}(2x + 2y - 2x - 2y)$$

$\dots = 0$ صفر $\Rightarrow$ F پایستار است و مستقل از مسیر است

$$\begin{cases} \int (2xy + y^2 + 3x^2z^3 + 1)\,dx = x^2y + xy^2 + x^3z^3 + x \\ \int (x^2 + 2xy + 1)\,dy = x^2y + xy^2 + y \\ \int (3x^3z^2 + 1)\,dz = x^3z^3 + z \end{cases}$$

$f = x^2y + xy^2 + x^3y^3 + x + y + z$

حاصل انتگرال $= f_{(B)} - f_{(A)} = f_{(-1,0,1)} - f_{(1,0,1)} = -4$

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

سوال امتحانی: انتگرال خط زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{(0,1,2)}^{(0,2,4)} \underbrace{(ze^x+e^y)}_{M}dx + \underbrace{(xe^y-e^z)}_{N}dy + \underbrace{(e^x-ye^z)}_{P}dz$$

$F=(M,N,P)$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ ze^x+e^y & xe^y-e^z & e^x-ye^z \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \vec{i}(-e^z+e^z) - \vec{j}(e^x-e^x) + \vec{k}(e^y-e^y) = 0$$

F پایستار است و انتگرال مستقل از مسیر است

$$\int (ze^x+e^y)dx = ze^x+xe^y$$

$$\int (xe^y-e^z)dy = xe^y-ye^z$$

$$\int (e^x-ye^z)dz = ze^x-ye^z$$

$$f = xe^y+ze^x-ye^z$$

حاصل انتگرال: $f(B)-f(A) = f(0,2,4)-f(0,1,2) = \dots$

$$\dots = (4e^0-2e^4)-(2e^0-1e^2) = (4-2e^4)-(2-e^2)$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

قضیه‌ی دیورژانس

○ چنین سطح باهم درفضا حجمی را محدود کرده‌اند و معادله‌ی سطوح مشخص است و $F = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ میدان نیرو است. به‌جای اینکه روی سطوح از تابع $\vec{F}.\vec{n}$ انتگرال سطح بگیریم، از دیورژانس F روی حجم بسته انتگرال سه‌گانه می‌گیریم

○ فرض کنید سطح بسته‌ی S با معادله‌ی $g(x, y, z) = 0$ درفضا حجم بسته R را محدود کرده است، و $n = \frac{\vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} g|}$ بردار قائم یکه بر سطح S است، آنگاه:

ضرب نقطه‌ای

$$\oiint_S \vec{F}.\vec{n}\, ds = \iiint_R (\vec{\nabla}.F)\, dv$$

شار برون‌سوی گذرنده از سطح S توسط نیروی $\vec{F}$

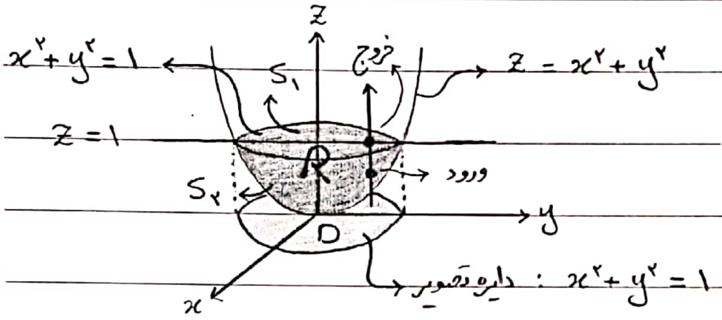
○ اگر در امتحان محاسبه‌ی شار برون‌سوی را خواستند یا محاسبه‌ی $\oiint \vec{F}.\vec{n}\, ds$ روی سطح بسته را خواستند یا بررسی درستی قضیه‌ی دیورژانس را خواستند فقط انتگرال سه‌گانه‌ی سمت راست را محاسبه می‌کنیم

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

مثال ○ شار برونسوی گذرنده از سطح محدود به صفحه‌ی $z=1$ و سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ را توسط نیروی $\vec{F} = x^2yz\,\vec{i} + xy^2z\,\vec{j} + xyz^2\,\vec{k}$ محاسبه کنید.



سطح بسته $S = S_1 \cup S_2$

شار برونسوی $= \oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds \underset{\text{قضیه دیورژانس}}{\overset{\text{سطح بسته}}{=}} \iiint_R \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dv = \dots$

$$\dots = \iiint_R (2xyz + 2xyz + 2xyz)\,dv = \dots$$

$$\dots = 3\iint_D \int_{z=x^2+y^2}^{z=1} 2xyz\,dz\,dA = \dots$$

$$\dots = 3\iint_D xyz^2 \Big|_{z=x^2+y^2}^{z=1} dA = \dots$$

$$\dots = 3\iint_{x^2+y^2\le 1} xy\left(1-(x^2+y^2)^2\right)dA$$

$\Rightarrow$ قطبی $\Rightarrow 3\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=1} (r\cos\theta)(r\sin\theta)(1-r^4)\,r\,dr\,d\theta$

$$\Rightarrow 3\underbrace{\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \underbrace{\sin\theta}_{u}\,\underbrace{\cos\theta}_{u'}\,d\theta}\int_{r=0}^{r=1} r^3(1-r^4)\,dr = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} = \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = 0$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /   Subject:

مثال ۵ انتگرال $\oiint \vec{F}.\vec{n}\, ds$ را محاسبه کنید که در

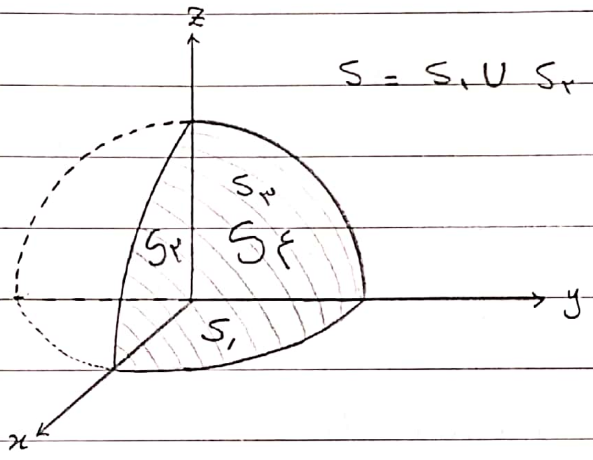
آن $\vec{F} = (x^3+y)\vec{i} + (y^3+z)\vec{j} + (z^3+x)\vec{k}$ و S سطح

بسته محدود به صفحات مختصات و کره‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ در ناحیه‌ی ۱/۸

اول است.

سطح صفحات $= S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ $= S$

با سطح کره



$$\oiint_S \vec{F}.\vec{n}\, ds \xrightarrow[\text{قضیه دیورژانس}]{\text{سطح بسته}} \iiint_R \vec{\nabla}.\vec{F}\, dv = \dots$$

$$\dots = \iiint_R (3x^2+3y^2+3z^2)\, dv$$

مختصات کروی:
$$3\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2}\int_{\rho=0}^{\rho=1} \rho^2 . \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$\Rightarrow 3\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho^4 d\rho = 3\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \dots$$

$$\dots = \frac{3\pi}{10}$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

نکته مهم: اگر در محاسبه‌ی انتگرال سه‌گانه ناحیه‌ی انتگرال‌گیری بیضی‌گون ...

باشد، با تغییر متغیر، بیضی‌گون را به کره‌ی واحد تبدیل می‌کنیم و $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

سپس از مختصات کروی استفاده می‌کنیم.

$\frac{x}{a}=X \Rightarrow x=aX$

$\frac{y}{b}=Y \Rightarrow y=bY$

$\frac{z}{c}=Z \Rightarrow z=cZ$

$dV=dx\,dy\,dz=|abc|\,dX\,dY\,dZ$

$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(X,Y,Z)}=abc$

مثال: شار برونسوی گذرنده از سطح رویه $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$ توسط نیروی

$\vec{F}=\frac{x^3}{12}\vec{i}+\frac{y^3}{27}\vec{j}+\frac{z^3}{48}\vec{k}$ را محاسبه کنید. (با شکلش کاری نداریم)

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\iiint_R \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dv$$

$$\Rightarrow \iiint_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}\leq 1}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}\right)dv$$

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

$$\Rightarrow ۲\times۳\times۴ \iiint_{x^۲+y^۲+z^۲\leq ۱} (x^۲+y^۲+z^۲)\, dx\, dy\, dz$$

مختصات کروی $$۲۴\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}\int_۰^{۱} \rho^۲ . \rho^۲ \sin\varphi \; d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$\Rightarrow ۲۴(۲\pi)(۲)\left(\frac{۱}{۵}\right) = \frac{۹۶\pi}{۵}$$

iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /

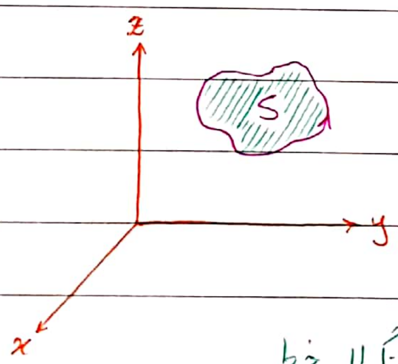
Subject:

قضیه استوکس (قضیه گرین در فضا)

○ یک یا چند منحنی باهم در فضا سطحی را محدود کرده‌اند و $F = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ میدان نیروست، به جای اینکه روی منحنی بسته انتگرال خط بگیریم، روی سطح بسته از تابع ... $(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n}$ انتگرال سطح می‌گیریم

○ فرض کنید منحنی بسته C در فضا سطح بسته S با معادله‌ی $g(x, y, z) = 0$ را محدود کرده است، $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ میدان نیرو است، آنگاه:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C M\,dx + N\,dy + P\,dz = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, ds$$



○ در امتحان در سوال مربوط به قضیه استوکس فقط انتگرال خط را فقط با پارامتری کردن منحنی حساب می‌کنیم

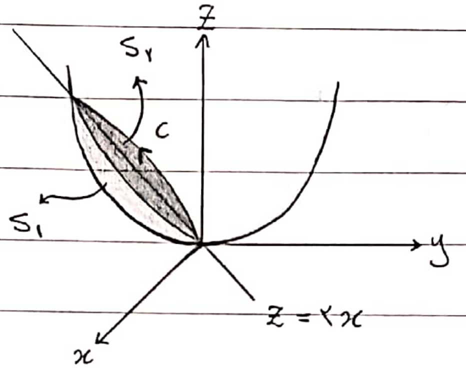
iman NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Date: / /

Subject:

مثال ○ انتگرال $\oint_c z\,dx + (x+y)\,dy + x\,dz$ را حساب کنید که در آن c منحنی حاصل از تقاطع صفحه‌ی $z = 2x$ با سهمی‌گون $z = x^2 + y^2$ است.



$$\begin{cases} z = 2x \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \to \underbrace{x^2 + y^2 = 2x}_{\text{دایره}} \to (x-1)^2 + y^2 = 1^2 \to \begin{cases} x = 1\cos t + 1 \\ y = 1 \sin t + 0 \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \\ z = 2x = 2(1 + \cos t) \end{cases} \Rightarrow \text{دیفرانسیل} \Rightarrow \begin{cases} dx = -\sin t\, dt \\ dy = \cos t\, dt \\ dz = -2 \sin t\, dt \end{cases}$$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$$\Rightarrow \int_{t=0}^{t=2\pi} \left\{ 2(1+\cos t)(-\sin t\, dt) + (1 + \cos t + \sin t)(\cos t\, dt) + (1+\cos t)(-2\sin t\, dt) \right\}$$

$$\Rightarrow \int_{t=0}^{t=2\pi} \left\{ -4\sin t - 3 \sin t \cos t + \cos t + \cos^2 t \right\} dt$$

$$\Rightarrow \overbrace{-4\int_0^{2\pi} \sin t\, dt}^{0} - \overbrace{3\int_0^{2\pi} \sin t \cos t\, dt}^{0} + \overbrace{\int_0^{2\pi} \cos t\, dt}^{0} + \int_0^{2\pi} \cos^2 t = \dots$$

$$\dots \Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos t}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt + \overbrace{\frac{1}{2}\int \cos t\, dt}^{0} = \pi$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

Date: / / Subject:

تمرین ۵ انتگرال $\oint_c (x+y+z)\,dx + (x-y+z)\,dy + (-x+y+z)\,dz$

را حساب کنید که در آن c منحنی حاصل از برخورد صفحه $x+y+z=1$ با استوانه $x^2+y^2=4$ است.

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 1 - x - y = 1 - 2\cos t - 2\sin t \end{cases}$$

دیفرانسیل $\Rightarrow$
$$\begin{cases} dx = -2\sin t \\ dy = 2\cos t \\ dz = 2\sin t - 2\cos t \end{cases}$$

شکلش خیلی سخته کشیدنش ☺

$$\int_{t=0}^{t=2\pi} \{1(-2\sin t) + (1-4\sin t)(2\cos t) + (1-4\cos t)(2\sin t - 2\cos t)\}\,dt$$

$$\int_{t=0}^{t=2\pi} \{-16\sin t\cos t + 8\cos^2 t\}\,dt$$

$$\Rightarrow \overbrace{\int_0^{2\pi} (-16\sin t\cos t)\,dt}^{0} + \int_0^{2\pi} 8\cos^2 t\,dt = 8\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos t}{2}\,dt$$

$$\Rightarrow 8\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,dt + 8\overbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{2}\,dt}^{0} = 8 \times \frac{1}{2} \times t\Big|_0^{2\pi} = 8\pi$$

Scanned by CamScanner